האוניברסיטה העברית
המחלקה לסטטיסטיקה

מבחן סיום בקורס: (52879) שיטות חישוביות בתכנון לא ליניארי

מועד: א
תאריך הבחינה: 26/6/2009
משך המבחן: שעתיים
חומר מותר בשימוש: מחשבון, עד 6 עמודים הכתובים בכתב יד.
הוראות: יש לענות על חלק א' ועל שניים מתוך שלוש השאלות של חלק ב'. אם יופיעו פיתרונות של כל שלוש השאלות של חלק ב' יבדקו שתי השאלות הראשונות לפי סדר הופעתם במחברת. יש לנמק (בקיצור) כל אמירה. יש לציין בבירור חלקי מבחן שאין ברצונכם שיבדקו.

חלק א (50%)

להל"ן קוד שנכתב ב-R ובו מופעל אלגוריתם למציאת נקודת המינימום של הפונקציה f:

```
f <- function(x) x*log(x)
q <- 0.618
x0 <- 0
x1 <- 1
n.iter <- 10

for(i in 1:n.iter)
{
   d <- x1 - x0
   x00 <- x0 + d*(1-q)
   x11 <- x0 + d*q
   if(f(x00) < f(x11)) x1 <- x11 else x0 <- x00
}
x.opt <- (x0+x1)/2
```

1. (10) מבין האפשרויות הבאות מי המתאימה ביותר לתיאור האלגוריתם הנתון:
   - אלגוריתם הירידה התלולה ביותר (Steepest Decent).
   - האלגוריתם של ניוטון (Newton's Method).
   - אלגוריתם ניוטוני למחצה (Quasi-Newton).
   - אלגוריתם חלוקת הזהב (Golden Section).
   - אלגוריתם המבוסס על קירוב בעזרת פולינום מדרגה 2 (Quadratic Interpolation).
   - אלגוריתם המבוסס על קירוב בעזרת פולינום מדרגה 3 (Qubic Fit).
2. (10) בעבור ערכים גדלים והולכים של n.iter, מה הוא הערך הנומרי עליו יתכנס הגודל x.opt ?
3. (10) כדי להבטיח שהמרחק בין x.opt לבין הערך הנומרי המתואר בסעיף הקודם לא יעלה על 10^{-6} , מה הגודל המינימלי שיש לקבוע ל- n.iter ?
4. (20) כתבו מחדש את הקוד כך שיחשב את המינימום של הפונקציה

$$f(x)=\frac{1+5x+x^3}{1+3x^4}-\frac{2-4x}{1+7x^2}$$

בתחום $[-2,0]$ וברמת דיוק של 10^{-6} .

חלק ב: תיאוריה (50%) (פתור 2 שאלות בלבד!)

1. נתונה הפונקציה $f(x,y)=2x^2+xy+y^2-x+5y$ ומערכת האילוצים $x+y\le 3.5$, $x\ge 0$ ו- $y\ge 0$.
   1. (15) בדקו את את תנאי קון-טקר (Kohn-Tacker) בעבור הנקודות: $(x_0,y_0)=(0,0)$, $(x_1,y_1)=(2.375,1.125)$ ו- $(x_2,y_2)=(0.25,0)$.
   2. (10) איזו מבין הנקודות הנ"ל עשויה להיות נקודת מינימום, בהינתן האילוצים?

2. המודל $AR(k)$ הוא מודל מקובל לתיאור ההתפלגות של סידרה עיתית. בהתאם למודל זה, התפלגות התצפית בתקופה נתונה נקבע על סמך התצפיות ב-k התקופות שקדמו לתקופה הנתונה. הקשר מאופיין בעזרת הפרמטרים $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$. בעבור שאריות המפולגות בהתפלגות נורמלית סטנדרטית מתקבל כי נראות התצפיות (בהנתן k התצפיות הראשונות) היא
$$L(\theta_1,\ldots,\theta_k)=(2\pi)^{-(n-k)/2}exp\left\{-0.5\sum_{i=k+1}^{n}(X_i-\theta_1X_{i-1}-\theta_2X_{i-2}-\cdots-\theta_kX_{i-k})^2\right\}$$
ידוע כי ערכי הפרמטרים הם אי-שליליים ויורדים באופן מונוטוני כתלות בזמן שחלף. (כלומר,, $\theta_j\le\theta_{j-1}$, לכל $1<j\le k$). מעוניינים לאמוד את ערכם של הפרמטרים בעזרת שיטת הנראות המירבית. נסחו את בעית האמידה כבעיות תיכנון ריבועי (Quadratic Programming). זהו, בפרט, את המטריצה של המקדמים של הגורם הריבועי בפונקציית המטרה ואת וקטור המקדמים של הגורם הלינארי. כמו כן, זהו את המטריצה והווקטור המגדירים את מערכת האילוצים.

3. נתונה פונקציית מטרה מן הצורה $f(x)=0.5x'Qx+b'x+c$, בעבור מטריצה ריבועית Q, וקטור מקדמים b, וסקלר c. נתון כי אברי האלכסון הראשי של המטריצה שווים כולם ל- σ^2 וכי שאר האיברים שווים כולם ל- $\rho\sigma^2$, בעבור $-1<\rho<1$ נתון. מפעילים על פונקציית מטרה זו את אלגוריתם הירידה התלולה ביותר (Steepest decent) ומעוניינים בקצב ההתכנסות של האלגוריתם לפיתרון.
   1. (10) מה הם הערכים העצמיים של Q? שימו לב כי הוקטור שכל רכיביו שווים ל-1 הוא וקטור עצמי של Q, וכן כל וקטור הניצב לוקטור זה.
   2. (15) מיצאו חסם ליחס $\frac{(x_{n+1}-x_{opt})'Q(x_{n+1}-x_{opt})}{(x_n-x_{opt})'Q(x_n-x_{opt})}$, בעבור x_n ו- x_{n+1} ערכים עוקבים של האלגוריתם ובעבור הפיתרון x_{opt} .