האוניברסיטה העברית
המחלקה לסטטיסטיקה

מבחן סיום בקורס: <u>(52879) שיטות חישוביות בתכנון לא ליניארי</u>

מועד: ב
תאריך הבחינה: 26/7/2009
משך המבחן: שעתיים
חומר מותר בשימוש: מחשבון, עד 6 עמודים הכתובים בכתב יד.
הוראות: יש לענות על חלק א' ועל שניים מתוך שלוש השאלות של חלק ב'. אם יופיעו פיתרונות של כל שלוש השאלות של חלק ב' יבדקו שתי השאלות הראשונות לפי סדר הופעתם במחברת. יש לנמק (בקיצור) כל אמירה. יש לציין בבירור חלקי מבחן שאין ברצונכם שיבדקו.

<u>חלק א (50%)</u>

להל"ן קוד שנכתב ב-R ובו מופעל אלגוריתם למציאת נקודת המינימום של הפונקציה f:

```
> f <- function(x) x[1]^2 + 6*x[2]^2 + 4*x[1]*x[2] + 7*x[1] + 20*x[2]
> g <- function(x) {
+    g1 <- 2*x[1] + 4*x[2] + 7
+    g2 <- 4*x[1] + 12*x[2] + 20
+    return(c(g1,g2))
+ }
> h <- function(a,y) f(y - a*g(y))
>
> n.iter <- 3
> x <- matrix(nrow=2,ncol=n.iter +1)
> x[,1] <- c(100,100)
>
> for(i in 1:n.iter)
+ {
+   a <-  optimize(h,c(0,10),y=x[,i])$minimum
+   x[,i+1] <- x[,i] - a*g(x[,i])
+ }
> x
     [,1]      [,2]       [,3]         [,4]
[1,]  100  54.69273  0.4109379  0.000270098
[2,]  100 -20.91892 -0.5799981 -1.676014182
```

1. (10) מבין האפשרויות הבאות מי המתאימה ביותר לתיאור האלגוריתם הנתון:
   - אלגוריתם הירידה התלולה ביותר (Steepest Decent).
   - האלגוריתם של Davidson-Fletcher-Powell = DFP.
   - האלגוריתם של Han-Powel.
   - האלגוריתם של BFGS = Broyden-Flecher-Goldfarb-Shanno.
   - אלגוריתם המבוסס על קירוב בעזרת פולינום מדרגה 2 (Quadratic Interpolation).
   - אלגוריתם המבוסס על קירוב בעזרת פולינום מדרגה 3 (Qubic Fit).

2. (10) בעבור ערכים גדלים והולכים של n.iter, מהו הוקטור אליו יתכנסו עמודות x ?

3. (10) רשמו חסם המאפיין את קצב ההתכנסות של האלגוריתם למינימום במונחי היחס בין המרחק מן הגבול באיטרציה נתונה למרחק באיטרציה הקודמת. מה ערכו של החסם בעבור פונקצית המטרה הנתונה בקוד.
4. (20) כתבו מחדש את הקוד כך שיחשב את המינימום של הפונקציה הנתונה בעזרת האלגוריתם של ניוטון.

<u>חלק ב: תיאוריה (50%)</u> (פתור 2 שאלות בלבד!)

1. אלגוריתם ניוטוני למחצה למציאת מינימום של פונקציה מעדכן את נקודת החיפוש הנוכחית x_n לנקודת החיפוש x_{n+1} על ידי מיזעור פונקצית המטרה לאורך קרן שמקורה בנקודת החיפוש הנוכחית וכיוונה $-S_n\dot{f}(x_n)$.
   1. (15) הוכח או מצא דוגמא נגדית לטענה שהגראדיאנט בצעד הבא של האלגוריתם מקיים את התנאי $[\dot{f}(x_{n+1})]'Q_n[\dot{f}(x_n)]=0$.
   2. (10) מה משמעות התנאי מ-1 בעבור אלגוריתם הירידה התלולה ביותר (Steepest decent)?

2. נסתכל על קבוצת כל הוקטורים ב- R^d שסכומם אפס ועל וקטור נתון y . אנו מעונינים למצוא, מבין כל הוקטורים שסכומם אפס, את הוקטור הקרוב ביותר לוקטור הנתון, כאשר המרחק נקבע כמרחק האוקלידי. (כלומר, המרחק בין x ל- y הוא $\sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i-y_i)^2}$.)
   1. (10) נסחו את הבעיה כבעית תיכנון ריבועי (Quadratic Programming).
   2. (10) רשמו את תנאי לאגראנג' (Lagrange) בעבור הבעיה הנתונה.
   3. (5) הראו כי הוקטור בעל הרכיבים $y_i-\bar{y}$, $1\le i\le d$, מקיים את התנאים מ-2, בעבור $\bar{y}$ ששוה לממוצע הרכיבים של הוקטור y .

3. נתונה פונקציית מטרה מן הצורה $f(x)=-[\log(1+x)]/[(1+x)^2]$, המוגדרת בתחום $x>-1$ ומקבלת מינימום בנקודה $x=0.6487$. מעונינים להפעיל את האלגוריתם של ניטון למציאת המינימום, כאשר נקודת ההתחלה היא $x_0=2.0$.
   1. (15) חשבו את הנגרת הראשונה והנגזרת השניה של הפונקציה ורישמו את נוסחת העידכון של האלגוריתם המבוקש.
   2. (10) חשבו את הנקודות x_1 ו- x_2 . האם נראה כאילו האלגוריתם מתכנס לפיתרון המבוקש? נמקו את התוצאה המתקבלת.