שאלה 1

כמות הגשמים במרכז הארץ בשנה מסוימת היתה: ינואר – 135 מ"מ, אפריל - 28 מ"מ, יולי – 0 מ"מ אוקטובר – 13 מ"מ.

(א) חשבו פונקציה מחזורית כך שתשחזר 4 ערכים אלה.

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cos\frac{2\pi t}{4} + \beta_1 \sin\frac{2\pi t}{4} + \alpha_2 \cos\frac{4\pi t}{4} \qquad \lambda = \frac{\pi}{2} \Leftarrow P = 4$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 \cos\frac{\pi t}{2} + \beta_1 \sin\frac{\pi t}{2} + \alpha_2 \cos \pi t$$

$$\alpha_0 = \overline{Y} = 44; \quad \alpha_1 = \frac{2}{4}\sum_{t=1}^{4} Y_t \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{1}{2}(-28+13) = -7.5$$

$$\beta_1 = \frac{2}{4}\sum_{t=1}^{4} Y_t \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) = \frac{1}{2}(135+0) = 67.5$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{4} Y_t \cos(\pi t) = \frac{1}{4}(-135+28+13) = -23.5$$

הפונקציה: $Y_t = 44 - 7.5\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + 67.5\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - 23.5\cos(\pi t)$

(ב) השתמשו ב-(א) על מנת לחזות את כמות הגשם באוגוסט של אותה שנה.

פתרון: חודש אוגוסט מתאים ל- $t = 3\frac{1}{3}$

אם נציב $t = 3\frac{1}{3}$ בפונקציה נקבל $\hat{Y}_{3\frac{1}{3}} = -6.725$.

(ג) אם תחשבו נכון בסעיפים (א) ו- (ב) תקבלו תחזית שלילית. כיצד תסבירו זאת?

פתרון: לכמויות הגשם מתאימה מחזוריות של $n = 12$ (לפחות). אנו רק לקחנו בחשבון אורך מחזור 2 ו-4. הפונקציה נותנת התאמה מושלמת ל-4 הערכים הנתונים אך צריך לקחת בחשבון גם אורכי מחזורים אחרים (3 , 6, 2.4) ע"מ שתתן התאמה טובה לשאר הערכים.

(ד) האם קיימת פונקציה מחזורית בעלת אורך מחזור 5 המתאימה לתיאור הסדרה? אם לא הסבירו מדוע. אם כן חשבו פונקציה זו וחזו את כמות הגשם לחודש אוגוסט.

פתרון: יש פונקציה מחזורית בעלת אורך מחזור 5 שמשחזרת 4 ערכים אלה. למעשה יש אינסוף פונקציות. נקבע ערך שרירותי ל- Y_5, למשל $Y_5 = 44$ ונחשב את הפונקציה המחזורית בעלת אורך

מחזור 5 העוברת דרך 4 הערכים הנתונים ו- Y_5.

$$Y_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{2}(\alpha_k \cos\frac{2\pi k}{5}t + \beta_k \sin\frac{2\pi k}{5}t) \quad \left[\frac{n}{2}\right] = 2 \Leftarrow n = 5$$

$Y_5 = 44$ כי קבענו $\alpha_0 = \overline{Y} = 44$

$$\alpha_1 = \frac{2}{5}\sum_{t=1}^{5} Y_t \cos\frac{2\pi}{5}t = \frac{2}{5}(135\cos\frac{2\pi}{5} + 28\cos\frac{4\pi}{5} + 13\cos\frac{8\pi}{5} + 44\cos\frac{10\pi}{5}) \approx 26.83$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{5}\sum_{t=1}^{5} Y_t \cos\frac{4\pi}{5}t = \frac{2}{5}(135\cos\frac{4\pi}{5} + 28\cos\frac{8\pi}{5} + 13\cos\frac{16\pi}{5} + 44\cos 4\pi) \approx -26.83$$

$$\beta_1 = \frac{2}{5}\sum_{t=1}^{5} Y_t \sin\frac{2\pi}{5}t \approx 53, \qquad \beta_2 = 18$$

תחזית לאוגוסט:

$$\hat{Y}_{3\frac{1}{3}} = 44 + 26.83\cos(\frac{2\pi}{5}\frac{10}{3}) + 18\sin(\frac{2\pi}{5}\frac{10}{3}) - 26.83\cos(\frac{8\pi}{3}) + 18\sin(\frac{8\pi}{3}) = 44$$

זו תחזית יותר גרועה מהקודמת.

לפונקציה שהתאמנו אין שום משמעות אם מדובר ברצף של שנים (עם ערכים זהים משנה לשנה) כי

למשל $Y_1 = Y_6$ אך Y_6 מתאים לאפריל ונקבל שהערך המותאם לאפריל שנה שנייה הוא 135 ולא 28.

<u>שאלה 2</u>

המודל עבור P=24 הוא: $Y_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{12}(\alpha_k \cos\frac{2\pi k}{24}t + \beta_k \sin\frac{2\pi k}{24}t)$. אורכי המחזורים הם:

$p_k = \frac{2\pi}{2\pi k/24} = \frac{24}{k}$. עבור $k = 1$ אורך המחזור 24, עבור $k = 2$ אורך המחזור 12,...,עבור $k = 11$

אורך המחזור $\frac{24}{11}$, עבור $k = 12$ אורך המחזור 2.

המודל עבור P=12, הוא: $Y_t = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^{12}(\alpha_k^* \cos\frac{2\pi k}{12}t + \beta_k^* \sin\frac{2\pi k}{12}t)$. אורכי המחזורים

$p_k = \frac{2\pi}{2\pi k/12} = \frac{12}{k}$. עבור $k=1$ אורך המחזור 12, עבור $k=2$ אורך המחזור 6...עבור $k=5$

אורך המחזור $\frac{12}{5} = 2.4$, עבור $k=6$ אורך המחזור 2.

לכן, המקדמים מהמודל הראשון (P=24) שיהיו תקפים למודל השני (P=12) הם אלו המתאימים ל-

k=2 (אורך מחזור 12), *k=4* (אורך מחזור 6), *k=6* (אורך מחזור 4), *k=8* (אורך מחזור 3), *k=10*

(אורך מחזור 2.4) , ו-*k=12* (אורך מחזור 2). שאר המקדמים הם 0. נראה למשל עבור *k=2*:

$$\alpha_2 = \frac{2}{24}\sum_{t=1}^{24} Y_t \cos\frac{2\pi 2}{24}t = \frac{1}{12}\sum_{t=1}^{24} Y_t \cos\frac{2\pi}{12}t = 2\left[\frac{1}{12}\sum_{t=1}^{12} Y_t \cos\frac{2\pi}{12}t\right] = \frac{2}{12}\sum_{t=1}^{12} Y_t \cos\frac{2\pi}{12}t = \alpha_1^*$$

הסבר:

מאחר והסדרה חוזרת על עצמה כל 12 נקודות זמן, $Y_{12+j} = Y_j, \quad j=1,...,12$ וכן

$\cos\frac{2\pi}{12}(12+j) = \cos(2\pi + \frac{2\pi j}{12}) = \cos\frac{2\pi j}{12}$ לכן הסכום מ- $j=13,...,24$ זהה לסכום של

$j=1,...,12$.

(ב) חזרו על סעיף (א) אך בסדר הפוך, החוקר הניח מראש P=12 אך למעשה P=24. אילו מקדמים השמיט החוקר במקרה זה? אילו מקדמים עדיין תקפים? האם יש מקדמים מיותרים?

פתרון:

ע"ס (א) ברור שבמקרה זה המקדמים שלא נלקחו בחשבון הם אלו המתאימים ל: *k=1* (אורך מחזור 24), *k=3* (אורך מחזור 8), *k=5* (אורך מחזור 4.8), *k=7* (אורך מחזור $\frac{24}{7}$), *k=9* (אורך מחזור $2\frac{2}{3}$) , ו-*k=11* (אורך מחזור $\frac{24}{11}$). אין מקדמים מיותרים מאחר וכל אורך מחזור במודל השני (P=12) מופיע גם במודל הראשון (P=24): $\alpha_k^* = \alpha_{2k}, \beta_k^* = \beta_{2k}, \quad k=1,...,6$

שאלה 3. להלן נתוני סדרה עתית רבעונית עבור 4 שנים:

שנה	I				II				III				IV			
רבעים	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
נתונים	71	95	100	58	65	86	98	53	60	91	88	57	59	87	102	60

(א) התאימו לנתונים פונקציה מחזורית בעלת אורך מחזור 2.

פתרון:

עבור אורך מחזור 2: $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\frac{2\pi}{2}t) + \beta_1 \sin(\frac{2\pi}{2}t) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\pi t)$

$$\hat{\alpha}_0 = \overline{Y} = 76.875, \quad \hat{\alpha}_1 = \frac{1}{16}\sum_t Y_t \cos \pi t = \frac{1}{16}\sum_t Y_t (-1)^t = -3.5$$

לכן: $\hat{Y}_t = 76.875 - 3.5\cos \pi t$ (פונקציה מחזורית בעלת אורך מחזור 2).

(ב) חשבו את השאריות של המודל המותאם.

פתרון:

Y_t	71	95	100	58	65	86	98	53
$\hat{Y}_t$	$80\frac{3}{8}$	$73\frac{3}{8}$	$80\frac{3}{8}$	$73\frac{3}{8}$	$80\frac{3}{8}$	$73\frac{3}{8}$	$80\frac{3}{8}$	$73\frac{3}{8}$
$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$	$-9\frac{3}{8}$	$21\frac{5}{8}$	$19\frac{5}{8}$	$-15\frac{3}{8}$	$-15\frac{3}{8}$	$12\frac{5}{8}$	$17\frac{5}{8}$	$-20\frac{3}{8}$

60	91	88	57	59	87	102	60
$80\frac{3}{8}$	$73\frac{3}{8}$	$80\frac{3}{8}$	$73\frac{3}{8}$	$80\frac{3}{8}$	$73\frac{3}{8}$	$80\frac{3}{8}$	$73\frac{3}{8}$
$-20\frac{3}{8}$	$17\frac{5}{8}$	$7\frac{5}{8}$	$-16\frac{3}{8}$	$-21\frac{3}{8}$	$13\frac{5}{8}$	$21\frac{5}{8}$	$-13\frac{3}{8}$

(ג) האם השאריות מתנהגות כמו רעש לבן? אם לא אילו מחזורים קיימים בסדרת השאריות?

פתרון:

השאריות אינן מתנהגות כמו רעש לבן. יתרה מכך, רואים מידית שבכל שנה סימני השאריות הם (- + + -) כלומר שיש מרכיב מחזורי בעל אורך מחזור 4.

(ד) לאור הסעיפים הקודמים מהו המודל המתאים לנתונים המקוריים? רשמו מודל זה. במידה והמודל שונה מסעיף (א), האם יש לחשב מחדש את כל מקדמי המודל?

פתרון:

המודל המתאים לסדרה המקורית הוא:

$$Y_t = \alpha_0 + \sum_{k=`}^{4/2}[\alpha_k \cos(\frac{2\pi k}{4}t) + \beta_k \sin(\frac{2\pi k}{4}t)] = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\frac{\pi}{2}t) + \beta_1 \sin(\frac{\pi}{2}t) + \alpha_2 \cos(\pi t)$$ (מ

מודל זה כולל מרכיב בעל אורך מחזור 2 כמו בסעיף (א) ומרכיב בעל אורך מחזור 4).

אין צורך לחשב מחדש את $\hat{\alpha}_2$, מקדם המרכיב בעל אורך מחזור 2 שאותו כבר חישבנו בסעיף

(א) (נובע גם ישירות מנוסחת האומד). כלומר $\hat{\alpha}_2$ שווה ל- $\hat{\alpha}_1$ מסעיף (א) השווה ל- 3.5- .

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{2}{16}\sum_{t=1}^{16} Y_t \cos\frac{2\pi}{4}t = \frac{1}{8}\sum_{t=1}^{16} Y_t \cos\frac{\pi}{2}t = -8.1875$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{2}{16}\sum_{t=1}^{16} Y_t \sin\frac{\pi}{2}t = -16.625$$

$\hat{\alpha}_0 = \bar{Y} = 76.875$ לכן המודל הוא:

$$Y_t = 76.875 - 8.1875\cos(\frac{\pi}{2}t) - 16.625\sin(\frac{\pi}{2}t) - 3.5\cos(\pi t)$$

שאלה 4. המודל הבא הותאם לסדרה חודשית בת 60 תצפיות.

$$Y_r = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{6}(\alpha_k \cos\frac{2\pi kt}{12} + \beta_k \sin\frac{2\pi kt}{12}) + \varepsilon_t \ ; \ \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2) .$$

בטבלא להלן מוצגים אומדני α_k, β_k כפי שחושבו מתוך הנתונים:

k	1	2	3	4	5	6
P_k	12	6	4	3	2.4	2
$\hat{\alpha}_k$	-1.07	.63	1.34	-.93	.52	.10
$\hat{\beta}_k$	.61	.01	1.47	-1.61	.58	-

$\hat{\alpha}_0 = 3.49 \quad \sigma^2 = 7.65$

(א) מהו המודל (החסכוני ביותר) המתאים לנתונים? בצעו ניתוח סטטיסטי מתאים.

פתרון:

נבדוק תחילה קיום מרכיב בעל אורך מחזור 12: $H_0:\alpha_1=\beta_1=0$ $\frac{(\hat{\alpha}_1^2+\hat{\beta}_1^2)/2}{\hat{\sigma}^2 2/T} \sim_{H_0} F_{(2,T-n)}$.

אצלנו: $2.97=\frac{1.517\times 60}{4\times 7.65}=\frac{60((-1.07)^2+.61^2)/2}{2\times 7.65}$. עבור $\alpha=0.05$ $F_{2,60-12}^{.95}\approx 3.2$ לכן לא נדחה H_0.

באותו אופן: $H_0:\alpha_2=\beta_2=0$ $\frac{60(.63^2+.01^2)}{4\times 7.65}=0.78$ אין מרכיב מובהק בעל אורך מחזור 6

$H_0:\alpha_3=\beta_3=0$ $\frac{60(1.34^2+1.47^2)}{4\times 7.65}=7.76$ יש מרכיב מאד מובהק בעל אורך מחזור 4

$H_0:\alpha_4=\beta_4=0$ $\frac{60(.93^2+(-1.61)^2)}{4\times 7.65}=6.78$ יש מרכיב מאד מובהק בעל אורך מחזור 3

$H_0:\alpha_5=\beta_5=0$ $\frac{60(.52^2+.58^2)}{4\times 7.65}=1.19$ אין מרכיב מובהק בעל אורך מחזור 2.4

$H_0:\alpha_6=0$ (תמיד $\beta_{n/2}=0$) לכן הסטטיסטי: $\frac{\hat{\alpha}_6^2}{\hat{\sigma}^2/60}\sim F_{1,48}$ אצלנו $\frac{.1^2}{7.65/60}=.078<4.05$ המרכיב אינו מובהק.

מה מסקנתכם לגבי המחזורים הקיימים בסדרה ואלו שאינם קיימים? בפרט, האם קיים מרכיב מחזורי בעל אורך מחזור 12? נמקו.

פתרון:

המרכיבנים המובהקים הם אלו המתאימים לאורכי מחזור 3 ו- 4. אין מרכיב החוזר על עצמו בדיוק כל 12 חודשים (לא דחינו ההשערה $\alpha_1=\beta_1=0$ ברמת מובהקות 5%) אך מצד שני, מאחר ויש מרכיב החוזר על עצמו כל 3 חודשים ומרכיב החוזר על עצמו כל 4 חודשים הרי צירוף 2 המרכיבים נותן מרכיב החוזר על עצמו כל 12 חודשים. למעשה אנו רואים מרכיב החוזר על עצמו כל 12 חודשים אך הוא מוסבר ע"י המרכיבים בעלי אורכי מחזור 3 ו-4.

(ב) בדקו את ההשערה שהשאריות מהמודל שהתאמתם בסעיף א' מתנהגים כמו רעש לבן.

פתרון:

בגלל שעמודות המשתנים המסבירים בלתי תלויות הרי שלו התאמנו מודל לשאריות מהמודל שמצאנו ב-(א) היינו מקבלים את האומדנים הבאים:

k	1	2	3	4	5	6
P_k	12	6	4	3	2.4	2
$\hat{\alpha}_k$	-1.07	.63	0	0	.52	.10
$\hat{\beta}_k$	.61	.01	0	0	.58	0

כלומר, אותם המקדמים כמו קודם למחזורים הלא מובהקים ואפס לאומדנים המובהקים.

$$\left\{\frac{\frac{60}{2}((\hat{\alpha}_1^2+\hat{\beta}_1^2)+(\hat{\alpha}_2^2+\hat{\beta}_2^2)+(\hat{\alpha}_5^2+\hat{\beta}_5^2))+60\times\hat{\alpha}_6^2}{\sigma^2}\right\}/11 \sim F_{11,48}$$

($Var(\hat{\alpha}_6)=\frac{\sigma^2}{T}$ שונות שאר האומדנים $\frac{\sigma^2}{T/2}$)

$$\{30(1.07^2+.61^2+.63^2+.01^2+.52^2+.58^2)+60\times .1^2\}/11 : 7.65 = .906$$

$F_{11,48}^{.95}=2.05$ לכן לא דוחים את ההשערה שלשאריות אין שום מרכיב מחזורי.