

האוניברסיטה העברית בירושלים
המחלקה לסטטיסטיקה

מבחן בקורס **ניתוח סדרות עתיות** 52640
תשס"ז, סמסטר א', מועד א'
תאריך המבחן: ו' בשבט תשס"ז, 25.1.2007
שם המורה: פרופ' דני פפרמן

זמן המבחן- 3 שעות.

ענו על 3 מתוך 5 השאלות הבאות. אין לצבור נקודות מיותר מאשר 3 שאלות.
כל סעיף פתור נכון בשאלה כלשהיא יזכה אתכם ב 8.5 נקודות.

שאלה 1

בציורים בעמודים 4-5 של המבחן מוצגים גרף של סדרה חודשית, גרף של לוג הסדרה, גרפים של סדרות הפרשים וגרפים של מקדמי מתאם עצמיים וחלקיים.

1.1- מהי לדעתכם הטרגנספורמציה המתאימה להפיכת הסדרה המקורית X_t לסטציונרית? נמקו.

1.2- מהו מודל מתאים לסדרה $Z_t = \log(X_t) - \log(X_{t-1})$? השתמשו בערכים שבציורים על מנת לאמוד את מקדמי המודל ואת $Var(Z_t)$, אם שונות הסטיות במודל זה היא $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = 4$.

1.3- מהו המודל המתאים לסדרה $W_t = (Z_t - Z_{t-1})$ לאור המודל שהתאמתם לסדרה Z_t ? חשבו את שונות הסדרה W_t והשוו לשונות הסדרה Z_t . מה מסקנתכם לגבי התאמת מודל לסדרה W_t ? התייחסו גם לציור של מקדמי המתאם העצמיים של הסדרה W_t .

1.4- נניח כי לסדרה Z_t הותאם המודל $Z_t = \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ והתקבל $\hat{\phi} = -0.25$. חשבו אומדן ל- θ . (רמז: הניחו $\hat{\phi} = \phi$ וחשבו שונות ושונות משותפת של הסדרה $U_t = (Z_t - \phi Z_{t-1})$).

שאלה 2

יהי נתון המודל $Y_t = \mu_t + \eta_t$; $\mu_t = \mu_{t-1} + r_{t-1}$; $r_t = r_{t-1} + w_t$ סדרות רעש לבן בלתי תלויות בעלות תוחלות אפס ושונויות: $Var(\eta_t) = \sigma_\eta^2$; $Var(w_t) = \sigma_w^2$.

2.1- רשמו את המודל כמודל מצב/מרחב (State space mode).

2.2- נניח שבזמן $t = 2$ $\hat{\mu}_2 = Y_2$; $\hat{r}_2 = Y_2 - Y_1$ (ערכים התחלתיים). חשבו את מטריצת השונויות

$$Var \begin{pmatrix} \hat{\mu}_2 \\ \hat{r}_2 \end{pmatrix} = E \left[\begin{pmatrix} \hat{\mu}_2 \\ \hat{r}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} \hat{\mu}_2 \\ \hat{r}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \right]'$$

$\sigma_\eta^2, \sigma_w^2$ כפונקציה של השונויות

2.3- בזמן $t = 3$ מתקבלת תצפית חדשה Y_3 . חשבו על ידי שימוש ב-קלמן פילטר את $(\hat{\mu}_3, \hat{r}_3)$

2.4- חשבו תחזית לתצפית Y_4 בזמן $t = 3$. הסבירו כיצד תחשבו את שונות התחזית $E(\hat{Y}_{4|3} - Y_4)^2$? אין צורך לחשב.

שאלה 3

3.1- הגדירו את המודל הכפלי והמודל החיבורי בביצוע החלקה מעריכית והסבירו את ההבדלים ביניהם מבחינת ההנחות על הקשרים בין המרכיבים השונים. (אין לרשום את משוואות ההחלקה עצמן.)

3.2- בביצוע החלקה מעריכית כפלית עם מגמה חיבורית (Holt Winter) לסדרה עתית $\{Y_t\}$, עם מקדמי החלקה $\alpha = 0.16$ (מגמה), $\gamma = 0.02$ (שיפוע), ו $\delta = 0.09$ (עונתיות), התקבלו הערכים הבאים לזמן $t=119$.

מרכיבים	$\hat{L}_{119}$	$\hat{R}_{119}$	$\hat{S}_{119}^{Jan}$	$\hat{S}_{119}^{Feb}$	$\hat{S}_{119}^{Mar}$	$\hat{S}_{119}^{Apr}$	$\hat{S}_{119}^{May}$	$\hat{S}_{119}^{Jun}$
ערכים	310	2.2	1.28	1.23	1.20	1.15	1.10	0.90

$\hat{S}_{119}^{Jul}$	$\hat{S}_{119}^{Aug}$	$\hat{S}_{119}^{Sep}$	$\hat{S}_{119}^{Oct}$	$\hat{S}_{119}^{Nov}$	$\hat{S}_{119}^{Dec}$
0.62	0.58	0.60	0.84	1.16	1.38

מה ניתן להסיק מערכי מקדמי ההחלקה? מה תהיה תחזיתכם ל Y_{121} אם התקבלה תצפית חדשה $Y_{120} = 498$?

3.3- יהי $X_t = L_t + \varepsilon_t$ כאשר $L_t = a + bt$ (a ו b קבועים) ו ε_t רעש לבן בעל תוחלת אפס ושונות σ_ε^2 . הראו שאם נגדיר $\hat{L}_2 = X_2$ ו $\hat{R}_2 = (X_2 - X_1)$, כי אז שימוש בהחלקה מעריכית חיבורית לפי שיטת Holt-Winter ללא עונתיות נותן אומדן חסר הטיות למגמה L_3 עבור כל ערך של מקדם ההחלקה α (המקדם לעדכון המגמה). עזרה: חשבו תחילה את המגמה המוחלקת $\hat{L}_3$.

3.4- מה תהיה התחזית $X_3(1)$ לתצפית X_4 תוך שימוש בהחלקה של סעיף 3.3? האם תחת הנחות המודל בסעיף 3.3 יש חזאי יותר טוב ל L_4 ומכאן ל X_4 מאשר השימוש בהחלקה מעריכית חיבורית? הגדירו מהו חזאי זה (אין צורך לבצע חישובים). מדוע חזאי זה טוב יותר?

שאלה 4

סטודנט בקורס של ניתוח סדרות עתיות התאים את המודל הבא לסדרת נתונים חודשית בת 60 תצפיות.

$$Y_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^3 \left(\alpha_k \cos \frac{2\pi kt}{6} + \beta_k \sin \frac{2\pi kt}{6} \right) + \varepsilon_t ; \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

להלן אומדני המקדמים α_k, β_k כפי שהסטודנט חישב מתוך הנתונים: $\hat{\alpha}_0 = 40$,

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 90 ; \hat{\alpha}_1 = -4.3, \hat{\alpha}_2 = -0.9, \hat{\alpha}_3 = -10.8, \hat{\beta}_1 = -3.26, \hat{\beta}_2 = -0.6, \hat{\beta}_3 = 0$$

4.1- מה היו מחשבות הסטודנט לגבי מחזורים אפשריים הקיימים בסדרה? מורה הקורס טען שהמודל שהתאים התלמיד מסובך מדי מאחר וברור שבסדרה הנדונה המרכיב הלא מקרי ("סיגנל") חוזר על עצמו כל 6 חודשים. עד כמה דומה או שונה המודל של המורה מהמודל שהתאים התלמיד?

4.2- מהו המודל החסכוני ביותר המתאים לנתונים? בצעו מבחנים סטטיסטים מתאימים. השתמשו ברמת מובהקות $\alpha = 0.10$.

4.3- כיצד תחזו את Y_{63} על סמך המודל שהגעתם אליו בסעיף 4.2? מהי נקודת הזמן הבאה אחרי $t = 63$ שעבורה תחזו את אותו ערך?

4.4- תחת אילו תנאים יתאים המודל הכללי שבראש השאלה (לא המודל של סעיף 4.2) לתיאור סדרה עתית חודשית שחוזרת על עצמה כל 12 חודשים? תחת אילו תנאים המודל אינו מתאים?

שאלה 5

5.1- יהי נתון המודל, $X_t = 1 + 0.5X_{t-1} + 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$, $\sigma_\varepsilon^2 = 2$; $Var(X_t) = 8$. חשבו $E(X_t)$ ורשמו את המודל המתאים ל- $\tilde{X}_t = [X_t - E(X_t)]$. (הסדרה סטציונרית). הראו ש $Cov(\tilde{X}_t, \tilde{X}_{t-1}) = 4$ וחשבו את שני מקדמי המתאם העצמיים הראשונים ושני מקדמי המתאם החלקיים הראשונים.

5.2- עבור המודל של סעיף 5.1, יהי $X_{46} = 14$, $X_{47} = 15$ ונניח כי החזאי של X_{47} בזמן $t = 46$ היה 14.5. חזו את X_{48} ואת X_{49} תחת המודל. מהי שונות טעות התחזית בחיזוי X_{49} ?

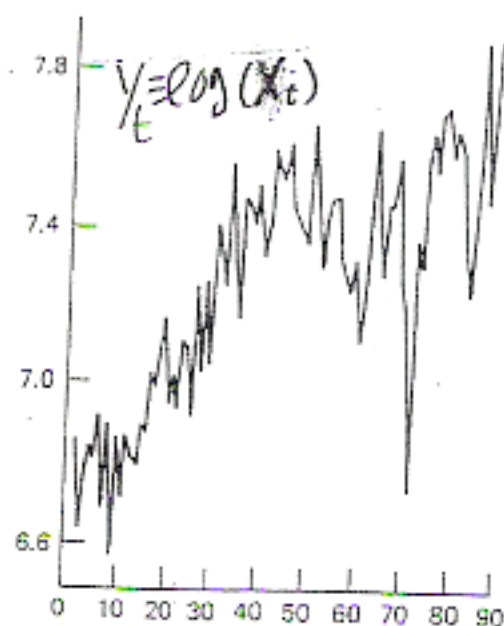
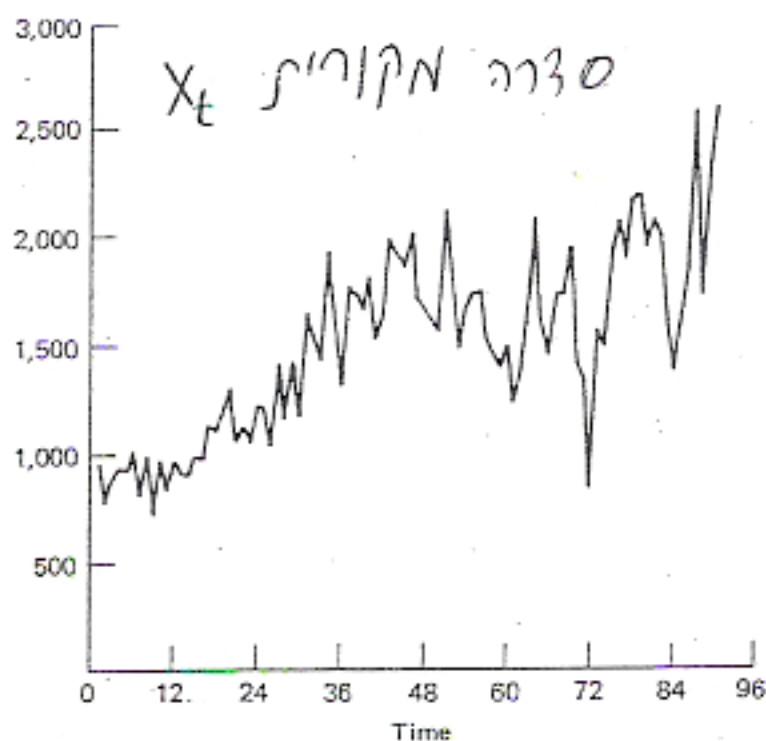
5.3- חשבו את הצפיפות הספקטראלית $f(\lambda)$ עבור המודל העונתי $Y_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-4}$; $\sigma_\varepsilon^2 = 4$. חשבו וציירו פונקציה זו בנקודות $\lambda = 0$, $\lambda = \pi/6$, $\lambda = \pi/4$, $\lambda = \pi/3$, $\lambda = \pi/2$, $\lambda = \pi$. אילו מחזורים קיימים עבור מודל זה?

5.4- עבור הפונקציה הספקטראלית בסעיף 5.3, חשבו את הטעות הריבועית הממוצעת (MSE) של האומד $\hat{f}(\lambda)$ בתדירות $\lambda = 0.5\pi$, אם אורך הסדרה הוא $T = 180$ ומשתמשים במשקלות של Parzen עם $M = 20$.

ב ה צ ל ח ה

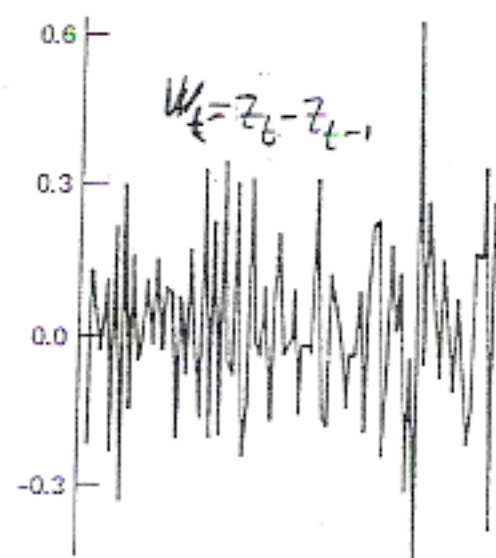
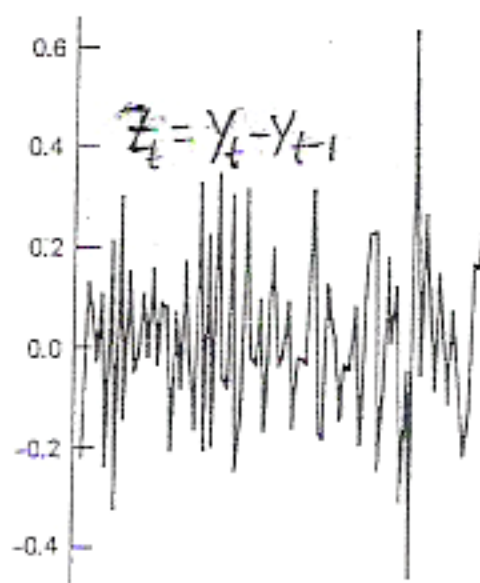
300 נקודות ואותו טיפוסיות של

-X



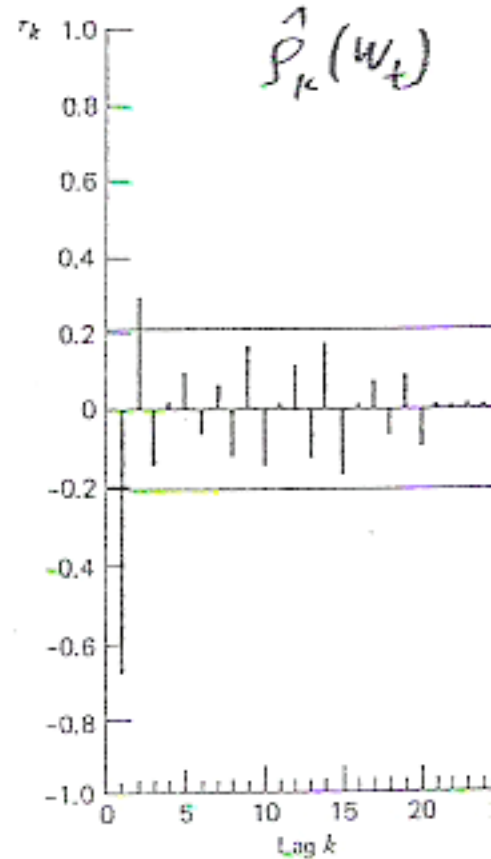
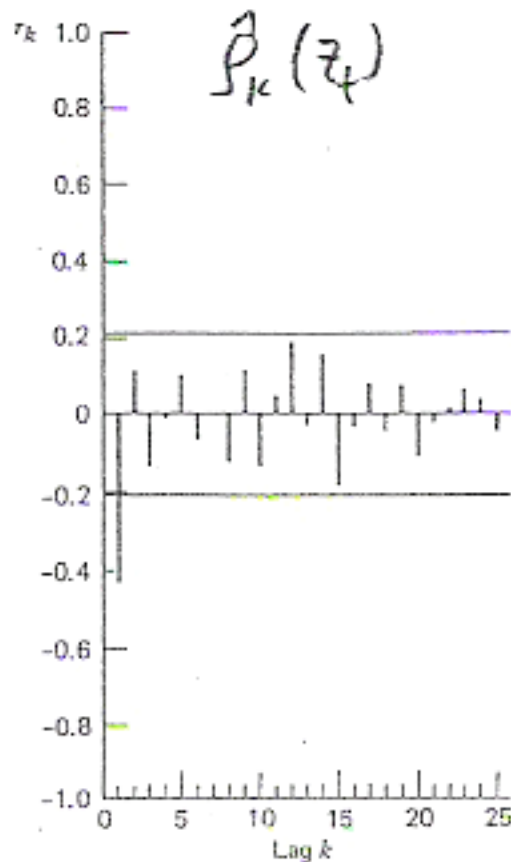
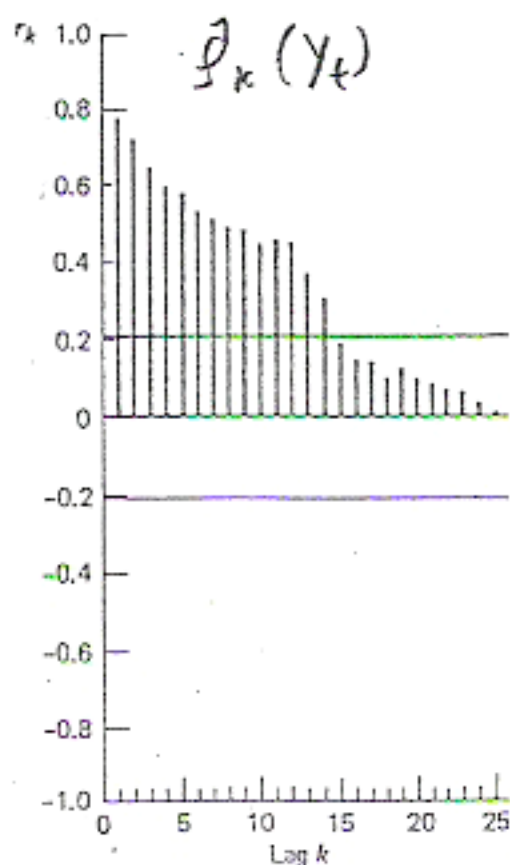
300 נקודות הבהירה

-I



300 נקודות נוספות

-J



-T נקודות נמנים חלקיים ומקדים נמנים של מודלים

