האוניברסיטה העברית בירושלים
המחלקה לסטטיסטיקה

מבחן בקורס **ניתוח סדרות עתיות** 52640
תשס"ז, סמסטר א', מועד א'
תאריך המבחן: ו' בשבט תשס"ז, 25.1.2007
שם המורה: פרופ' דני פפרמן

<u>זמן המבחן- 3 שעות.</u>

ענו על **3** מתוך 5 השאלות הבאות. <u>אין לצבור נקודות מיותר מאשר 3 שאלות</u>.

כל סעיף פתור נכון בשאלה כלשהיא יזכה אתכם ב **8.5** נקודות.

<u>שאלה 1</u>

בציורים בעמודים 4-5 של המבחן מוצגים גרף של סדרה חודשית, גרף של לוג הסדרה, גרפים של סדרות הפרשים וגרפים של מקדמי מתאם עצמיים וחלקיים.

-1.1 מהי לדעתכם הטרנספורמציה המתאימה להפיכת הסדרה המקורית X_t לסטציונרית? נמקו.

<u>פתרון:</u>

לסדרה המקורית יש מגמה (עולה) ושונויות שגדלות עם הזמן. השונויות מתיצבות מעט לאחר המעבר ללוג אך עדיין יש מגמת עליה. הסדרה Z_t נראית סטציונרית. הממוצע קרוב לאפס, אין מגמה ושונויות קבועות. כמו-כן $\hat{\rho}_k(Y_t)$ דועכת לאט לאפס בעוד ש- $\hat{\rho}_k(Z_t)$ נחתכת לאפס לאחר צעד אחד.

-1.2 מהו מודל מתאים לסדרה $Z_t = \log(X_t) - \log(X_{t-1})$? השתמשו בערכים שבציורים על מנת לאמוד את מקדמי המודל ואת $Var(Z_t)$, אם שונות הסטיות במודל זה היא $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 = 4$.

<u>פתרון:</u>

ע"ס ערכי $\hat{\rho}_k(Z_t)$ יש חיתוך לאחר צעד אחד. מקדמי המתאם החלקיים דועכים באופן סינוסואייד לאפס, לכן המודל MA(1) . ניתן אבל גם לטעון שמקדמי המתאם החלקיים נחתכים לאחר צעד אחד, ולכן מודל AR(1).

$$Z_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \Rightarrow \rho_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2} \Rightarrow -0.4 = \frac{\theta}{1+\theta^2} \Rightarrow \theta = -\frac{1}{2}$$

(עבור $\theta = -2$ הסדרה אינה אינורטיבילית). $V(Z_t) = (1+\theta^2)V(\varepsilon_t) = [1+(-0.5)^2]4 = 5$

-1.3 מהו המודל המתאים לסדרה $W_t = (Z_t - Z_{t-1})$ לאור המודל שהתאמתם לסדרה Z_t? חשבו את שונות הסדרה W_t והשוו לשונות הסדרה Z_t. מה מסקנתכם לגבי התאמת מודל לסדרה W_t? התייחסו גם לציור של מקדמי המתאם העצמיים של הסדרה W_t.

פתרון:

$\theta = -0.5$ ועבור $Z_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \Rightarrow Z_{t-1} = \varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2} \Rightarrow W_t = \varepsilon_t - (1-\theta)\varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_t$

$.Var(W_t) = (1+2.25+0.25)\sigma_\varepsilon^2 = 3.5\times 4 = 14 > Var(Z_t) = 5$ $.W_t = \varepsilon_t - 1.5\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2}$

ל-W_t מתאים מודל MA(2) ושונותו הרבה יותר גדולה משונות Z_t. מאחר והסדרה Z_t סטציונרית אין סיבה לבצע הפרש נוסף. שימו לב שמקדמי מתאם עצמיים של W_t נחתכים לאחר 2 צעדים, ולכן מודל MA(2).

1.4- נניח כי לסדרה Z_t הותאם המודל $Z_t = \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ והתקבל $\hat{\phi} = -0.25$. חשבו אומדן ל- θ.

(רמז: הניחו $\hat{\phi} = \phi$ וחשבו שונות ושונות משותפת של הסדרה $(U_t = (Z_t - \phi Z_{t-1})$.

פתרון:

המודל $Z_t = \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ ARMA(1,1) ונתון: $\hat{\phi} = -0.25$. מהנוסחה: $\rho_1 = \dfrac{(1-\phi\theta)(\phi-\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta}$ נוכל

לרשום: $-0.4 = \dfrac{(1-(-0.25)\theta)((-0.25)-\theta)}{1+\theta^2-2(-0.25)\theta} \Rightarrow -0.4(1+\theta^2-0.5\theta) = -0.25 + 1.0625\theta - 0.25\theta^2$

$0.15 + 0.8625\theta + 0.15\theta^2 = 0 \Rightarrow \theta = -0.18$ (הנתון השני עבור θ אינו נותן סדרה אינורטיבילית).

דרך אלטרנטיבית:

עבור $K \ge 2$ $\rho_k = \phi\rho_{k-1}$ (כמו במודל AR(1)) לכן: $\rho_2 = 0.1 = \phi\rho_1 = \phi(-0.4) \Rightarrow \phi = -0.25$

$$U_r = Z_t - \phi Z_{t-1} \Rightarrow Var(U_t) = Var(Z_t) + \phi^2 Var(Z_{t-1}) - 2\phi Cov(Z_t, Z_{t-1})$$

נשים לב כי: $Cov(Z_t, Z_{t-1}) = \rho_1 Var(Z_t)$ ולכן נקבל:

$$Var(U_t) = 5 + (-0.25)^2 5 - 2(-0.25)(-0.4\times 5) = 4.3$$

$$Cov(U_r, U_{t-1}) = Cov(Z_t - \phi Z_{t-1}, Z_{t-1} - \phi Z_{t-2}) = Cov(Z_t, Z_{t-1}) - \phi Cov(Z_t, Z_{t-2})$$
$$-\phi Var(Z_t) + \phi^2 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-2}) = -2 + \frac{1}{4}Cov(Z_t, Z_{t-2}) + \frac{1}{4}\times 5 + \frac{1}{16}(-2)$$

חישוב $Cov(Z_t, Z_{t-2})$ כדלקמן: $Z_t = \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ לכן נכפיל את 2 הצדדים ב- Z_{t-2} וניקח תוחלת ונקבל:

$$E(Z\ \ , Z_{t-2}) = \phi E(Z_{t-1}, Z_{t-2}) + E(\varepsilon_t, Z_{t-2}) + \theta E(\varepsilon_{t-1}, Z_{t-2}) = \phi\gamma_1 + 0 + 0 = -\frac{1}{4}(-2) = 0.5$$

לכן, $Cov(U_t, U_{t-1}) = -2 + \frac{1}{4}\times 0.5 + \frac{1}{4}\times 5 + \frac{1}{16}\times -2 = -0.75$

לכן, $\rho_1(U_t) = -\dfrac{0.75}{4.3} = -0.17 = \dfrac{\theta}{1+\theta^2} \Rightarrow \theta = -0.18$

שאלה 2

יהי נתון המודל $Y_t = \mu_t + \eta_t\ ;\ \mu_t = \mu_{t-1} + r_{t-1}\ ;\ r_t = r_{t-1} + w_t$, באשר η_t ו w_t סדרות רעש לבן בלתי תלויות בעלות תוחלות אפס ושונויות: $Var(\eta_t) = \sigma_\eta^2\ ;\ Var(w_t) = \sigma_w^2$.

2.1- רשמו את המודל כמודל מצב/מרחב (State space mode) .

<u>פתרון:</u>

$$\beta_t = (\mu_t \quad r_t)' \quad Y_t = (1 \quad 0)\beta_t + \eta_t$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_w^2 \end{pmatrix} \text{ ו- } \beta_t = \begin{pmatrix} \mu_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_{t-1} \\ r_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w_t \end{pmatrix}$$

2.2- נניח שבזמן $t = 2 \quad \hat{\mu}_2 = Y_2\ ;\ \hat{r}_2 = Y_2 - Y_1$ (ערכים התחלתיים). חשבו את מטריצת השונויות $Var\begin{pmatrix} \hat{\mu}_2 \\ \hat{r}_2 \end{pmatrix} = E\left[\begin{pmatrix} \hat{\mu}_2 \\ \hat{r}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_2 \\ r_2 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} \hat{\mu}_2 \\ \hat{r}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_2 \\ r_2 \end{pmatrix}\right]'$ כפונקציה של השונויות $\sigma_\eta^2, \sigma_w^2$.

<u>פתרון:</u>

$$Var\begin{pmatrix} \mu_t \\ r_t \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} Y_2 - Y_1 \\ Y_2 - Y_1 - r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_2 - Y_1 \\ Y_2 - Y_1 - r_2 \end{pmatrix}' = E\begin{pmatrix} (Y_2 - \mu_2)^2 & (Y_2 - \mu_2)(Y_2 - Y_1 - r_x) \\ (Y_2 - \mu_2)(Y_2 - Y_1 - r_x) & (Y_2 - Y_1 - r_2)^2 \end{pmatrix}$$

$$E(Y_2 - \mu_2)^2 = E(\eta_2^2) = \sigma_\eta^2,$$

$$E(Y_2 - \mu_2)(Y_2 - Y_1 - r_2) = E(\eta_2(Y_2 - \mu_2 - Y_1 + \mu_2 - r_2) = E(\eta_2(\eta_2 - Y_1 + (\mu_1 + r_1) - r_2)$$
$$= E(\eta_2(\eta_2 - \eta_1 - w_2)) = \sigma_\eta^2$$
$$E(Y_2 - Y_1 - r_2)^2 = E(Y_2 - \mu_2 - Y_1 + \mu_2 - r_2)^2 = E(\eta_2 - Y_1 + (\mu_1 + r_1) - r_2)$$
$$= E(\eta_2 - \eta_1 - w_2)^2 = 2\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2$$

לכן, קיבלנו:

$$Var\begin{pmatrix} \mu_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & \sigma_\eta^2 \\ \sigma_\eta^2 & 2\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 \end{pmatrix}$$

2.3- בזמן $t = 3$ מתקבלת תצפית חדשה Y_3. חשבו על ידי שימוש ב-קלמן פילטר את $(\hat{\mu}_3, \hat{r}_3)$

<u>פתרון:</u>

$$\hat{\beta}_3 = \hat{\beta}_{3|2} + P_{3|2}X_3'F_3^{-1}(Y_3 - X_3\hat{\beta}_{3|2})$$
$$\hat{\beta}_{3|2} = T\hat{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\mu}_t \\ \hat{r}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_2 - Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2Y_2 - Y_1 \\ Y_2 - Y_1 \end{pmatrix}$$

$$P_{3|2} = TP_2T' + Q$$

$$P_{3|2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & \sigma_\eta^2 \\ \sigma_\eta^2 & 2\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 & 3\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 \\ 3\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 & 2\sigma_\eta^2 + 2\sigma_w^2 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = X_3 P_{3|2} X_3' + \Sigma$$

$$F_3 = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 5\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 & 3\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 \\ 3\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 & 2\sigma_\eta^2 + 2\sigma_w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma_\eta^2 = 5\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 + \sigma_\eta^2 = 6\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2$$

מכאן,

$$\hat{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 2Y_2 - 1 \\ Y_2 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 & 3\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 \\ 3\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 & 2\sigma_\eta^2 + 2\sigma_w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{6\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2}\left(Y_3 - (1 \quad 0)\begin{pmatrix} 2Y_2 - Y_1 \\ Y_2 - Y_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2Y_2 - 1 \\ Y_2 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 \\ 3\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2 \end{pmatrix}\frac{1}{6\sigma_\eta^2 + \sigma_w^2}\left(Y_3 - 2Y_2 - Y_1\right)$$

2.4- חשבו תחזית לתצפית Y_4 בזמן $t = 3$. הסבירו כיצד תחשבו את שונות התחזית $E(\hat{Y}_{4|3} - Y_4)^2$? אין צורך לחשב.

<u>פתרון:</u>

התחזית לתצפית Y_4: $\hat{Y}_{4|3} = X_4'\hat{\beta}_{4|3} = X_4'T\hat{\beta}_3$

שונות התחזית: $(Y_4 - \hat{Y}_{4|3}) = (Y_4 - X_4'\hat{\beta}_{4|3}) = (X_4'\beta_4 + \eta_4 - X_4'\hat{\beta}_{4|3}) = \eta_4 + X_4'(\beta_4 - \hat{\beta}_{4|3})$

$$F_4 = V(Y_4 - \hat{Y}_{4|3}) = X_4'V(\hat{\beta}_{4|3})X_4 + \sigma_\eta^2 = X_4'P_{4|3}X_4 + \sigma_\eta^2$$

<u>שאלה 3</u>

3.1- הגדירו את המודל הכפלי והמודל החיבורי בביצוע החלקה מעריכית והסבירו את ההבדלים ביניהם מבחינת ההנחות על הקשרים בין המרכיבים השונים. (אין לרשום את משוואות ההחלקה עצמן.)

<u>פתרון:</u>

במודל חיבורי המגמה מתפתחת באופן חיבורי וההשפעה העונתית היא בלתי תלויה מהמגמה. במודל הכפלי המגמה מתפתחת בתוספות קבועות והגורם העונתי פרופורציונלי למגמה.

3.2- בביצוע החלקה מעריכית כפלית עם מגמה <u>חיבורית</u> (Holt Winter) לסדרה עתית $\{Y_t\}$, עם מקדמי החלקה $\alpha = 0.16$ (מגמה), $\gamma = 0.02$ (שיפוע), ו $\delta = 0.09$ (עונתיות), התקבלו הערכים הבאים לזמן t=**119**.

מרכיבים	$\hat{L}_{119}$	$\hat{R}_{119}$	$\hat{S}_{119}^{Jan}$	$\hat{S}_{119}^{Feb}$	$\hat{S}_{119}^{Mar}$	$\hat{S}_{119}^{Apr}$	$\hat{S}_{119}^{May}$	$\hat{S}_{119}^{Jun}$
ערכים	310	2.2	1.28	1.23	1.20	1.15	1.10	0.90

$\hat{S}_{119}^{Jul}$	$\hat{S}_{119}^{Aug}$	$\hat{S}_{119}^{Sep}$	$\hat{S}_{119}^{Oct}$	$\hat{S}_{119}^{Nov}$	$\hat{S}_{119}^{Dec}$
0.62	0.58	0.60	0.84	1.16	1.38

מה ניתן להסיק מערכי מקדמי ההחלקה? מה תהיה תחזיתכם ל Y_{121} אם התקבלה תצפית חדשה $Y_{120} = 498$?

פתרון:

ערכי מקדמי ההחלקה נמוכים מעידים על רעש בסדרה ולכן רוצים להסתמך יותר על העבר בתחזית.

$$L_{120} = \alpha\left(\frac{Y_{120}}{S_{119}^{120}}\right) + (1-\alpha)(L_{119} + R_{119}) = 0.16\left(\frac{498}{1.38}\right) + 0.84(310 + 2.2) = 320.0$$

$$R_{120} = \gamma\left(L_{120} - L_{119}\right) + (1-\gamma)R_{119} = 0.02(320 - 310) + 0.984(2.2) = 2.4$$

$$S_{120}^{*120} = \delta\left(\frac{Y_{120}}{L_{120}}\right) + (1-\delta)S_{119}^{120} = 0.09\left(\frac{498}{320}\right) + 0.91(1.38) = 1.39$$

לכן אין צורך בנרמול נוסף.

$$Y_{121|120} = (L_{120} + R_{120})S_{120}^{121} = (320 + 2.4)1.28 = 412.7$$

3.3- יהי $X_t = L_t + \varepsilon_t$ באשר $L_t = a + bt$ (a ו b קבועים) ו ε_t רעש לבן בעל תוחלת אפס ושונות σ_ε^2. הראו שאם נגדיר $\hat{L}_2 = X_2$ ו $\hat{R}_2 = (X_2 - X_1)$, כי אז שימוש בהחלקה מעריכית <u>חיבורית</u> לפי שיטת Holt-Winter <u>ללא עונתיות</u> נותן אומד חסר הטיה למגמה L_3 עבור כל ערך של מקדם ההחלקה α (המקדם לעדכון המגמה). עזרה: חשבו תחילה את המגמה המוחלקת $\hat{L}_3$.

פתרון:

$$\hat{L}_3 = \alpha X_3 + (1-\alpha)(\hat{L}_2 + \hat{R}_2) = \alpha X_3 + (1-\alpha)(X_2 + X_2 - X_1) = \alpha X_3 + (1-\alpha)(2X_2 - X_1)$$
$$= \alpha(X_3 - 2X_2 + X_1) + (2X_2 - X_1)$$

$$E(\hat{L}_3) = \alpha E(X_3 - 2X_2 + X_1) + E(2X_2 - X_1)$$
$$= \alpha(a + 3b - 2(a + 2b) + a + b) + (2(a + 2b) - (a + b)) = \alpha \times 0 + (a + 3b) = L_3$$

3.4- מה תהיה התחזית $X_3(1)$ לתצפית X_4 תוך שימוש בהחלקה של סעיף **3.3**?
האם תחת הנחות המודל בסעיף **3.3** יש חזאי יותר טוב ל L_4 ומכאן ל X_4 מאשר השימוש בהחלקה מעריכית חיבורית? הגדירו מהו חזאי זה (אין צורך לבצע חישובים). מדוע חזאי זה טוב יותר?

פתרון:

התחזית תהיה: $X_3(1) = \hat{L}_3 + \hat{R}_3$

חזאי יותר טוב מתקבל ע"י מודל רגרסיה. שני השיטות נותנות אומדנים חסרי הטייה אבל האומדנים הריבועים הפחותים הם בעלי שונות מינימאלית.

שאלה 4

סטודנט בקורס של ניתוח סדרות עתיות התאים את המודל הבא לסדרת נתונים חודשית בת 60 תצפיות.

$$Y_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{3}(\alpha_k \cos\frac{2\pi kt}{6} + \beta_k \sin\frac{2\pi kt}{6}) + \varepsilon_t \ ; \ \varepsilon_t \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

להלן אומדני המקדמים α_k, β_k כפי שהסטודנט חישב מתוך הנתונים: $\hat{\alpha}_0 = 40$,

$$\hat{\alpha}_1 = -4.3,\ \hat{\alpha}_2 = -0.9,\ \hat{\alpha}_3 = -10.8,\ \hat{\beta}_1 = -3.26, \hat{\beta}_2 = -0.6,\ \hat{\beta}_3 = 0 \ ;\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 90.$$

4.1- מה היו מחשבות הסטודנט לגבי מחזורים אפשריים הקיימים בסדרה? מורה הקורס טען שהמודל שהתאים התלמיד מסובך מדי מאחר וברור שבסדרה הנדונה המרכיב הלא מקרי (ה"סיגנל") חוזר על עצמו כל 6 חודשים. עד כמה דומה או שונה המודל של המורה מהמודל שהתאים התלמיד?

פתרון:

הסטודנט חושב שהמחזורים האפשריים הם 2,3,6. המורה טוען רק מחזור 6

4.2- מהו המודל החסכוני ביותר המתאים לנתונים? בצעו מבחנים סטטיסטים מתאימים. השתמשו ברמת מובהקות $\alpha = 0.10$.

פתרון:

$H_0 : \alpha_1 = \beta_1 = 0$ $\quad \dfrac{(-4.3^2 + -3.26^2)/2}{90\dfrac{2}{60}} = 4.852 > 2.4 = F^{0.9}_{(2.60-6)}$ הסטטיסטי מובהק ולכן יש מחזור באורך 6.

$H_0 : \alpha_2 = \beta_2 = 0$ $\quad \dfrac{(-0.9^2 + -0.6^2)/2}{90\dfrac{2}{60}} = 0.195 < 2.4 = F^{0.9}_{(2.60-6)}$ הסטטיסטי לא מובהק ולכן אין מחזור באורך 3.

$H_0 : \alpha_3 = 0$ $\quad \dfrac{60(-10.8^2)}{90} = 77.76 > 2.8 = F^{0.9}_{(1.60-6)}$ הסטטיסטי מובהק ולכן יש מחזור באורך 2.

לכן המודל: $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\frac{2\pi t}{6}) + \beta_1 \sin(\frac{2\pi t}{6}) + \alpha_3 \cos(\pi t) + \varepsilon_t$

4.3- כיצד תחזו את Y_{63} על סמך המודל שהגעתם אליו בסעיף 4.2? מהי נקודת הזמן הבאה אחרי $t = 63$ שעבורה תחזו את אותו ערך?

פתרון:

$$Y_{63} = \alpha_0 + \alpha_1 \cos(\frac{2\pi 63}{6}) + \beta_1 \sin(\frac{2\pi 63}{6}) + \alpha_3 \cos(63\pi)$$

$$Y_{63} = 40 + (-4.3)(-1) + (-3.26)(0) + (-10.8)(-1) = 55.1$$

נחזה את אותו ערך ב- Y_{69}

4.4- תחת אילו תנאים יתאים המודל הכללי שבראש השאלה (לא המודל של סעיף 4.2) לתיאור סדרה עתית חודשית שחוזרת על עצמה כל 12 חודשים? תחת אילו תנאים המודל אינו מתאים?

<u>פתרון:</u>

המודל מתאים כאשר הסדרה העתית מורכבת ממחזורים 2,3,6 או קומבינציות שלהם. המודל לא יתאים אם הסדרה העתית מורכבת ממחזורים 5 או 12

<u>שאלה 5</u>

5.1- יהי נתון המודל, $X_t = 1 + 0.5X_{t-1} + 0.25X_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$; $Var(X_t) = 8,\ \sigma_\varepsilon^2 = 2$.
חשבו $E(X_t)$ ורשמו את המודל המתאים ל- $\tilde{X}_t = [X_t - E(X_t)]$. (הסדרה סטציונרית). הראו ש $Cov(\tilde{X}_t, \tilde{X}_{t-1}) = 4$ וחשבו את שני מקדמי המתאם העצמיים הראשונים ושני מקדמי המתאם החלקיים הראשונים.

<u>פתרון:</u>

$$E(X_t) = 1 + .5E(X_{t-1}) + .25E(X_{t-2}) \Rightarrow \mu = 1 + .5\mu + .25\mu \Rightarrow \mu = 4$$

$$\tilde{X}_t = X_t - 4 = .5(X_{t-1} - 4) + .25(X_{t-2} - 4) + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} = .5\tilde{X}_{t-1} + .25\tilde{X}_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

נכפיל ב- $\tilde{X}_{t-1}$: $\tilde{X}_t\tilde{X}_{t-1} = .5\tilde{X}_{t-1}\tilde{X}_{t-1} + .25\tilde{X}_{t-2}\tilde{X}_{t-1} + \varepsilon_t\tilde{X}_{t-1} - 0.5\varepsilon_{t-1}\tilde{X}_{t-1}$ ולכן,

$$E(\tilde{X}_t\tilde{X}_{t-1}) = \gamma_1 = .5E(\tilde{X}_{t-1}\tilde{X}_{t-1}) + .25E(\tilde{X}_{t-2}\tilde{X}_{t-1}) + E(\varepsilon_t\tilde{X}_{t-1}) - 0.5E(\varepsilon_{t-1}\tilde{X}_{t-1})$$

$$= .5\gamma_0 + .25\gamma_1 + 0 - 0.5\sigma_\varepsilon^2 = .5(8) + .25\gamma_1 - 0.5(2) \Rightarrow .75\gamma_1 = 3 \Rightarrow \gamma_1 = 4$$

כמו-כן: $E(\tilde{X}_t\tilde{X}_{t-2}) = \gamma_2 = .5E(\tilde{X}_{t-1}\tilde{X}_{t-2}) + .25E(\tilde{X}_{t-2}\tilde{X}_{t-2}) + 0 + 0 = .5(4) + .25(8) = 4$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{4}{8} = .5,\quad \rho_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{4}{8} = .5,\quad \phi_{11} = \rho_1 = \frac{1}{2},\quad \phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{1/2 - 1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}$$

5.2- עבור המודל של סעיף **5.1**, יהי, $X_{46} = 14,\ X_{47} = 15$ ונניח כי החזאי של X_{47} בזמן $t = 46$ היה 14.5. חזו את X_{48} ואת X_{49} תחת המודל. מהי שונות טעות התחזית בחיזוי X_{49}?

<u>פתרון:</u>

$$X_{48} = X_{47}(1) = E(X_{48} \mid X_{47}, X_{46}, \ldots.) = E(1 + .5X_{47} + .25X_{46} + \varepsilon_{48} - 0.5\varepsilon_{47} \mid X_{47}, X_{46}, \ldots.)$$

$$= 1 + .5X_{47} + .25X_{46} - 0.5(X_{47} - X_{46}(1)) = 1 + .5(15) + .25(14) - 0.5(15 - 14.5) = 11.75$$

$$X_{49}=X_{47}(2)=E(X_{49}\mid X_{47},X_{46},....)=E(1+.5X_{48}+.25X_{47}+\varepsilon_{49}-0.5\varepsilon_{48}\mid X_{47},X_{46},....)$$
$$=1+.5X_{47}(1)+.25X_{47}=1+.5(11.75)+.25(15)=10.625$$

$$e_{47}(2)=X_{49}-X_{47}(2)=X_{49}-(1+.5X_{47}(1)+.25X_{47})$$
$$=(1+.5X_{48}+.25X_{47}+\varepsilon_{49}-0.5\varepsilon_{48})-(1+.5X_{47}(1)+.25X_{47})$$
$$=0.5(X_{48}-X_{47}(1))+\varepsilon_{49}-0.5\varepsilon_{48}=0.5\varepsilon_{48}+\varepsilon_{49}-0.5\varepsilon_{48}=\varepsilon_{49}$$

לכן, שונות התחזית $\sigma_\varepsilon^2=2$

5.3- חשבו את הצפיפות הספקטראלית $f(\lambda)$ עבור המודל העונתי $Y_t=\varepsilon_t+0.5\varepsilon_{t-4}$; $\sigma_\varepsilon^2=4$.
חשבו וציירו פונקציה זו בנקודות $\lambda=0$, $\lambda=\pi/6$, $\lambda=\pi/4$, $\lambda=\pi/3$, $\lambda=\pi/2$ ו $\lambda=\pi$.
אילו מחזורים קיימים עבור מודל זה?

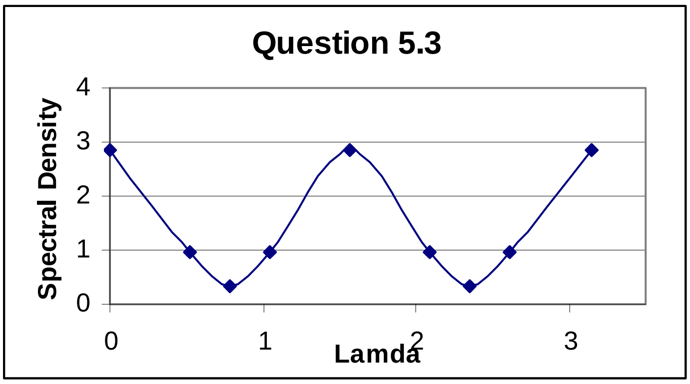
<u>פתרון:</u>

$$\gamma_0=\sigma_\varepsilon^2+0.5^2\sigma_\varepsilon^2=1.25\sigma_\varepsilon^2=5$$
$$\gamma_4=E(Y_tY_{t-4})=E(\varepsilon_tY_{t-4})+0.5E(\varepsilon_{t-4},Y_{t-4})=0.5\sigma_\varepsilon^2=2$$
$$f(\lambda)=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}\cos(4\lambda)$$
$$\lambda=0\Rightarrow f(\lambda)=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}(1)=\frac{9}{\pi}$$

$$\lambda=\frac{\pi}{6}\Rightarrow f(\lambda)=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}(\cos\frac{4\pi}{6})=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}(-.5)=\frac{3}{\pi}$$
$$\lambda=\frac{\pi}{4}\Rightarrow f(\lambda)=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}(\cos\pi)=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}(-1)=\frac{1}{\pi}$$

$$\lambda=\frac{\pi}{3}\Rightarrow f(\lambda)=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}(\cos\frac{4\pi}{3})=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}(-.5)=\frac{3}{\pi}$$

$$\lambda=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(\lambda)=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}(\cos\frac{4\pi}{2})=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}(1)=\frac{9}{\pi}$$
$$\lambda=\pi\Rightarrow f(\lambda)=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}(\cos4\pi)=\frac{5}{\pi}+\frac{4}{\pi}(1)=\frac{9}{\pi}$$



5.4- עבור הפונקציה הספקטראלית בסעיף **5.3**, חשבו את הטעות הריבועית הממוצעת (MSE) של האומד $\hat{f}(\lambda)$ בתדירות $\lambda = 0.5\pi$, אם אורך הסדרה הוא $T = 180$ ומשתמשים במשקלות של **Parzen** עם $M = 20$.

<u>פתרון:</u>

$$f(\lambda) = \frac{5}{\pi} + \frac{4}{\pi}\cos(4\lambda), \quad f'(\lambda) = -\frac{16}{\pi}\sin(4\lambda), \quad f''(\lambda) = -\frac{64}{\pi}\cos(4\lambda)$$

$$Bias = \frac{6}{20^2} f''(\lambda) = \frac{6}{400}\left(-\frac{64}{\pi}\cos(2\pi)\right) = \frac{-6(64)}{400\pi} = \frac{-0.96}{\pi} = -0.30$$

עבור השונות: $f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{5}{\pi} + \frac{4}{\pi}\cos(2\pi)\right)^2 = \frac{9^2}{\pi^2}$ לכן נקבל: $\mathrm{var} = \frac{20\left(\frac{9}{\pi}\right)^2 0.54}{180} = \frac{4.86}{\pi^2} = 0.49$

ה-MSE שווה ל: $MSE = \mathrm{var} + bias^2 = \frac{4.86}{\pi^2} + \left(\frac{-0.96}{\pi}\right)^2 = \frac{5.782}{\pi^2} = 0.58$

ב ה צ ל ח ה