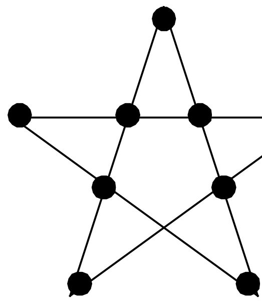
חשיבה על תנאים הכרחיים מול חשיבה על תנאים מספיקים

בין ארבע נקודות עובר רק קוו ישר אחד

חידה זו שייכת לאותו זן של חידות בו מגיעים בד״כ לפתרון נכון, פתרון זה מסמא את החשיבה ומהווה מוקד משיכה (attractor) כה עז עד כי אנו מחמיצים מגוון רחב של פתרונות אחרים.

לרשותך 10 נקודות (עיגולים קטנים מניר שחור) וחמישה קווים (יש לך שליטה מלאה באורכם). עלייך להניח בדיוק 4 נקודות (לא פחות ולא יותר) על כל קוו.

לאחר מספר ניסוים וטעיות ניתן יחסית בקלות להגיע לרעיון של כוכב (ראה ציור). פתרון זה נכון ומקיים את כל תנאי החידה. לרוב מגיעים לפתרון כזה על ידי סגנון חשיבה של ניסוי **וטעייה**. מיד נראה כי בהקשרים מסוימים סגנון כזה עשוי להביא למצב של ניסוי **והטעיה**. התשובה הנכונה היא, אגב, כי יש אינסוף פתרונות לחידה זו.



רעיון הכוכב הוא תולדה של חשיבה על ״תנאים מספיקים״ לפתרון. תנאים מספיקים, על פי הגדרתם, הם אוסף של תנאים שבהתקיימו הוא מתאר פתרון מלא לבעיה. ברם, כפי שנטען בהמשך, חשיבה על אוסף תנאים מספיקים טומנת בחובה מספר סכנות:

1. אם הפתרון אינו יחיד, הרי שלא למדנו מאום על פתרונות נוספים או אפילו פתרונות שכנים לבעיה, במהלך החיפוש אחר פתרונות מספיקים.
2. חשיבה על תנאים מספיקים מחייבת סגנון של ניסוי וטעייה ובו גם המצאות בקרבת הפתרון אינה מלמדת על הפתרון או על האפשרות שאין כלל פתרון לבעיה.
3. לא ניתן לדון ולנתח תנאים מספיקים בנפרד – תנאים מספיקים מקבלים משמעות מהיותם אוסף שלם.

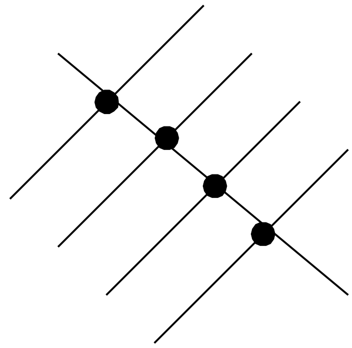
תנאים מספיקים הם אוסף של תנאים שבהתקיימם יש פתרון. אולם יש לשים לב **כי אי קיומם של תנאים אילו אינו אומר שום דבר לגבי קיום פתרון אחר; עדיין יתכן פתרון אחר לו ניתן לשייך אוסף אחר של תנאים מספיקים**. למשל ארוחת צהריים המכילה בשר בקר היא תנאי מספיק לתחושת שובע אך גם בשר עוף הוא תנאי מספיק לשובע. לתנאי הכרחי הגדרה שונה: אי קיומו של תנאי כזה שולל את האפשרות (באופן מוחלט) לקיום פתרון. למשל מים הם תנאי הכרחי לקיומו של אדם למשך יותר משלשה ימים. מעצם הגדרתו תנאי הכרחי מתקיים בכל פתרון שהוא (למשל מיץ תפוזים, מי עדן או קוקה קולה). לתכונה זו יתרון חשוב מאוד ממנו נוטים להתעלם: אם נצליח בדרך כלשהי לאתר תנאי כזה, הרי שמצאנו מעיין ״טביעת אצבע״ - סימן שחייב להימצא בכל פתרון שהוא.

תנאים הכרחיים, בניגוד לתנאים מספיקים, מוגדרים **כתנאים אשר אם אינם מתקיימים, הרי שאין פתרון לבעיה**. בניגוד לתנאים מספיקים אותם יש לנתח כקבוצה, תנאים הכרחיים ניתן, ואף ראוי לנתח בנפרד. כפי שנראה בהמשך לחשיבה על תנאים הכרחיים מספר סגולות חשובות המקילות על סריקת פתרונות. פתרון חידת הכוכב מדגים תחילה כיצד חשיבה על תנאים הכרחיים מאפשרת הבנה מעמיקה יותר ופרישת מרחב פתרונות עשיר יותר.

ידוע כי יש 10 נקודות סה"כ. הדרישה כי על כל קוו תהינה בדיוק 4 נקודות מצריכה עקרונית 20 נקודות. מכאן שעל על קוו צריכות להימצא בממוצע 2 נקודות. זהו תנאי הכרחי – אי קיומו יגרור חוסר התכנות של פתרון בכל כיוון מחשבה שהוא. עקרונית, חיתוך קווים יאפשר הצבה של נקודה על החיתוך ובכך לצמצם את כמות הנקודות. מכאן אנו למדים שבכפוף לתנאי ההכרחי שציינו ניתן להגדיר תנאי הכרחי חדש על פיו דרך כל נקודה יש להעביר 2 קווים (בממוצע).

תנאי הכרחי ניתן לקיים, ללא תלות בחידה הכוללת. למעשה קיומו של התנאי יוצר מעיין פיגום רעיוני – שהרי המרווח מהמצב המקיים את התנאי ההכרחי לפתרון הכולל חייב להיות קצר. טענה זו נובעת מהעובדה כי תנאי הכרחי **חייב על פי הגדרתו להתקיים בכל תצורה שהיא של הפתרון. קיומו של תנאי הכרחי הוא למעשה קיומו של חלק מכול מרחב הפתרונות.**

מיד נשוב ונפרט את כל יתרונותיהם של התנאים ההכרחיים כמסגרת חשיבה, נסתפק כרגע בהצהרה כי קיום תנאים הכרחיים מאפשר הגדרת **מצב ביניים שיישומו מקרב אותנו בהכרח לפתרון (או להוכחה כי אין פתרון)**. בציור ניתן לראות יישום של התנאי ההכרחי על קוו בודד - עליו מונחות 4 נקודות (נתון) וכל נקודה אכן נחצית על ידי שני קווים.



המסקנה מהציור היא שכל קוו צריך להיחצות על ידי ארבעת הקווים הנותרים, וזהו גם כן תנאי הכרחי. מימוש התנאי החדש אפשרי רק אם הקווים אינם מקבילים זה לזה. הפתרון אם כן הוא לאפשר מצב בו אין אף צמד קווים מקבילים. ניתן מיד לראות שיש אינסוף פתרונות לדרישה זו ובכך אינסוף פתרונות לבעיה. הפרט המעניין הוא שאפשר לדמות את הקווים לחבילת "דוקים", הטלת ה"דוקים" על הרצפה תסתיים כמעט בוודאות במבנה המקיים את הדרישות בבעיה זו. כך שלמעשה מלכתחילה <u>קשה יותר להגיע למצב של חוסר פתרון מאשר למצב של פתרון</u>.

חידה זו הדגימה כי בהינתן מצב של שפע פתרונות לבעיה, יש יתרון לחשיבה במסגרת של תנאים הכרחיים לצורך לחשיפתם[1].

תכונותיהן של תנאים הכרחיים

כאמור, מההגדרה של תנאי הכרחי ניתן לגזור מספר תכונות ייחודיות למושג זה:

1. תנאי הכרחי שמצוי במצב פשוט יותר של בעיה, חייב להימצא גם במצב המורכב שלה
2. תנאי הכרחי מצוי בכל פתרון שהוא של הבעיה
3. ניתן לדון על קיום כל תנאי הכרחי בנפרד מהשאר.
4. הוכחה או מסקנה שתנאי הכרחי איננו יכול להתקיים שקולה להוכחה שלבעיה הספציפית אין פתרון.

החידה שפתחנו בה מדגימה כיצד תכונה מספר 2 של התנאים ההכרחיים סייעה לאתר שפע של פתרונות במקום בו אנו מורגלים לראות פתרון אחד. הבה נראה כיצד יתר התכונות משפרות את יעילות הסריקה אחר פתרונות בשתי דוגמאות נוספות.

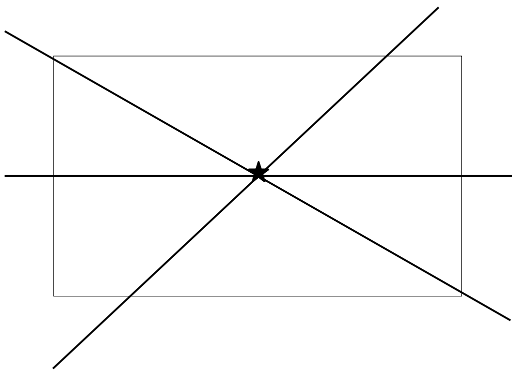
[1] ובאשר לטענה אפשרית כי כל מצב ניתן לתיאור של ידי עיוות של הכוכב אסתפק בהערה קצרה: עיוות כוכבים הוא יותר מניפולציה מתמטית מאשר תוצר טבעי של חשיבה, הוא גם איננו מספק הבנה כה חודרת של הבעיה הזו.

החידה הבאה הופיעה מספר שנים במבחני כניסה לחברת "מיקרוסופט" ומוצגת כאן בשינויים קלים. את שני המלבנים שבציור יש לחצות בעזרת קוו חיתוך אחד. לרשותך כלי חיתוך וסרגל (ללא שנתות). יש להדגיש כי אילו מלבנים **כלשהם** (הביטוי כלשהם מציין כי יש לפתור את החידה לכל סוג ושטח של מלבנים).

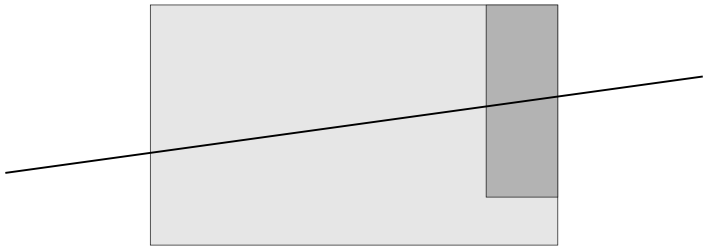
חידה זו איננה קשה במיוחד ויתכן שהפתרון כבר מצוי ברשותך. מרבית תלמידי נוטים לשאול האם מדובר בקו ישר או עקום. שאלה זו היא עדות ברורה לאופי החשיבה בו מחפשים אוסף של **תנאים מספיקים** לפתרון החידה - ברגע שנשאלת שאלה לגבי אופי קו החיתוך הרי שנעשה בזאת ניסיון לבדוק תפיסה של פתרון כולל (כזה שממלא את התנאים המספיקים). חיפוש מידע על הפתרון הכולל יגרור לעיתים מצב שהפתרון תלוי המידע שאותר איננו האופטימלי. למשל, נניח שהייתי מאשר כי ניתן לפתור את הבעיה בעזרת קוו עקום או שבור – הפתרונות שהיו נמצאים לא היו מכילים את הפתרון בקוו ישר.

היכן נאתר את התנאים הכרחיים? כאן ניעזר בתכונה הראשונה ברשימה: אם נפשט את הבעיה (רדוקציה) ונמצא במצב הפשוט תנאי הכרחי הרי שהוא חייב להתקיים גם במצב המורכב יותר (זו איננה טענת קל וחומר, זהו מצב הנובע מהגדרת התנאי ההכרחי!).

זה הזמן לשוב למר גייטס: בעיה פשוטה בהרבה של שני המלבנים היא חצית מלבן אחד. נכון, זו איננה רבותא גדולה. אך יש לזכור שאיננו מחפשים בשלב זה פתרון לבעיה הפשוטה, אנו מתעניינים בשאלה אחרת: ***מהם התנאים הכרחיים לפתרון הבעיה הפשוטה***. התבוננות קצרה במספר קווי חיתוך מלמדת אותנו שניתן לחצות את המלבן (כלשהו) לשני שטחים שווים בעזרת קוו ישר, ואז הקו עובר במרכז המלבן. זהו איננו תנאי הכרחי עדיין; <u>ההכרח לעבור במרכז כדי לחצות את המלבן - זהו תנאי הכרחי (ראה ציור).</u>



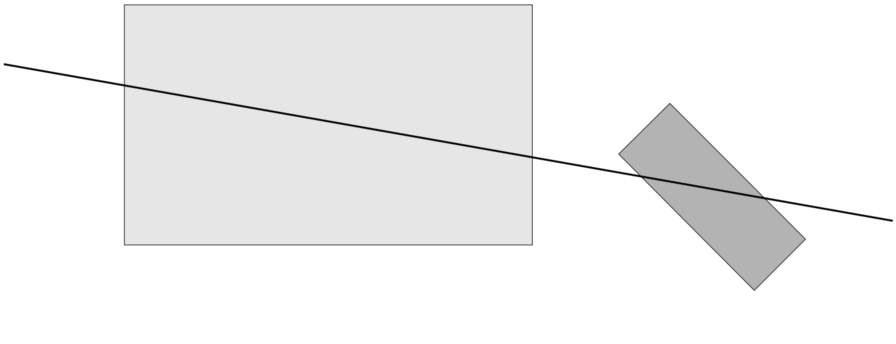
מצוידים בתנאי הכרחי נחזור לבעיה המקורית, ברור לגמרי שאם חפצים אנו בשני מלבנים חצויים הרי שאיין מנוס מלהעביר קוו דרך מרכזיהם. מספיק שנוותר על מרכז אחד כדי שניוותר עם מלבן לא חצוי אחד, בציור מתואר קוו החצייה (כיצד מוצאים את מרכזיהם של שני המלבנים?).



גישת חשיבה זו של חיפוש תנאים הכרחיים אינה סתם עוד דרך יעילה לחיפוש פתרונות, בדרך זו ניתן ללמוד רבות על הפתרון עוד לפני התוודענו אליו ישירות. העובדה שניתן לדון בכל תנאי הכרחי בנפרד מתנאים הכרחיים שאולי יש לפתרון מאפשרת להגדיר חידת ביניים מהסוג: "יש ליישם תחילה את התנאים ההכרחיים שמצאנו". לאחר שפתרנו חידה זו בנינו למעשה פיגום רעיוני המאפשר לנו לדון כעת בחידה אחרת מההגדרה המקורית והיא: "מה חסר לנו ממצב הביניים שבנינו עד לפתרון מלא של החידה המקורית?" לרוב חלוקת החידה המורכבת למספר שלבים מסוג זה מקילה על פתרון כול שלב, ומתוך העובדה שמדובר בתנאים הכרחיים "התנועה המחשבתית" היא בכיוון הפתרון המלא.

בנוסף היא מאפשרת דיון אינטליגנטי יותר ביחסי הגומלין בין הבעיה ופתרונותיה. למשל אילו ניתנו לנו שלשה מלבנים (ראה ציור) התשובה הייתה צריכה להיות: "אם מרכזי שלשת המלבנים נמצאים על קוו אחד הרי שנחצה אותם בקו ישר. אם לעומת זאת אין המרכזים על קוו אחד הרי שאיין מנוס מלהשתמש בקו שבור (או עקום)".

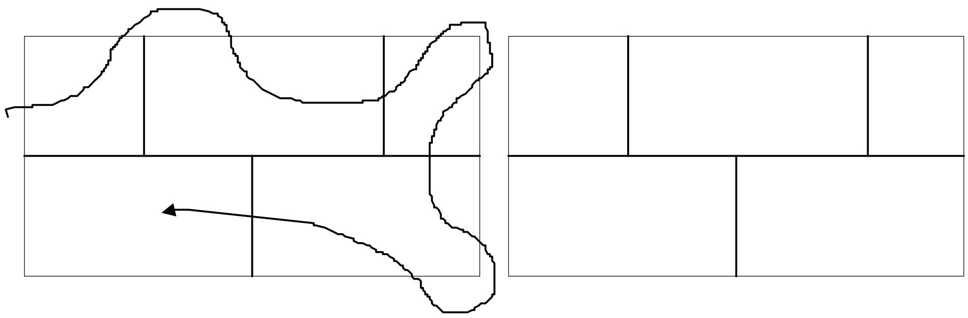
שימו לב שהחשיבה דרך תנאים הכרחיים מנטרלת אותנו מזיהומי חשיבה מסוימים. לאמיתו של דבר, הצמדת המלבנים הקשתה על מציאת הפתרון. בדרך כלל כאשר הבעיה מוצגת כך שהמלבנים אינם צמודים (ראה ציור) קל יותר לפתור אותה. ניתן לראות שמנקודת ראות של תנאים הכרחיים לא השתנה שום דבר במהלך הניתוח בשתי ההצגות השונות של הבעיה. חשיבה דרך תנאים הכרחיים אם כן, רובסטית יותר לתנאי הצגה סובייקטיביים של בעיה.



חידה זו הדגימה כי קל לחפש תנאים הכרחיים כי בניגוד לתנאים מספיקים הם נמצאים גם במצבים פשוטים יותר של הבעיה וכיצד מציאת תנאי הכרחי מהווה "תקיעת יתד" בכל מערך הפתרונות האפשרי לבעיה.

האם תמיד יש פתרון?

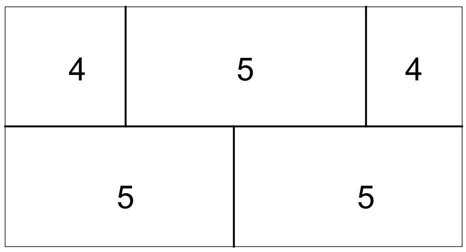
להבהרת יתרון נוסף של אסרטגית חשיבה זו אשתמש בחידה הבאה: בציור שלפניך יש להעביר קוו (רציף) שיחצה את כל הקטעים שבצורה פעם אחת בלבד. אדגיש לשם ההבהרה כי השקה אסורה; חציה פרושה מעבר מצד אחד של הקטע לצדו השני.



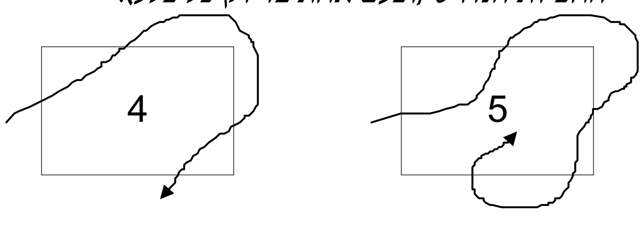
פתרון החידה בשיטה של ניסוי וטעייה נכלל בגישה המקובלת של חשיבה על תנאים מספיקים. לפני שתמשיך לקרוא הנני ממליץ לך לנסות לפתור את החידה במשך מספר דקות.

נבחן את החידה בעזרת ניתוח תנאים הכרחיים לפתרונה: נשתמש שוב בעיקרון כי המצאות תנאים הכרחיים במקרה פשוט יותר של הבעיה מחיבת את המצאות אותם תנאים בדיוק גם במצב המורכב של הבעיה.

הגדרת בעיה פשוטה יותר (רדוקציה) תהיה לחתוך את צלעותיו של מלבן פשוט. כמה פעמים יש לחצות צלעות מלבן? ובכן אם נספור את כמות חציות בכל מלבן נראה כי יש שני זנים של מלבנים בבעיה המקורית: אילו שנחצים 5 פעמים ואילו שנחצים 4 פעמים (ראה ציור).



נצייר אם כן את שני המלבנים ונעביר קוו (עקום מן הסתם) שיחצה כל מלבן בדיוק לפי מספר החציות הנדרש (ופעם אחת בדיוק כל צלע).



כפי שכבר ראינו, המצב הפשוט אינו מהווה ניסיון לפתור בעיה אלא ניסיון למצוא תנאים הכרחיים לפתרונה. ניתן לראות כי בעוד שבמלבן ארבעת החציות קוו החיתוך מסתיים בחוץ (אם נקודת ההתחלה שלו מחוץ למלבן, אם נקודת ההתחלה בתוכו גם נקודת הסיום תימצא בתוכו), הרי שבמלבן חמשת החיתוכים המצב שונה: במלבן זה תמיד ימצא קצה (סיום) אחד (ורק אחד)

של קו בתוכו. המצאות קצה אחד של קוו בתוך מלבן של חמש חציות הוא תנאי הכרחי גם בבעיה המורכבת.

עתה כשאנו אוחזים בתנאי הכרחי מוגדר היטב נחזור לבעיה המקורית בגישת "תנאים הכרחיים תחילה". ניסיון לממש תנאי הכרחי זה מבהיר לנו מציאות שונה משראינו בחידות הקודמות: מעצם הגדרתו, כל קו יש רק שני קצוות (קו כמוהו כחוט) ואילו כאן אנו נדרשים לשלשה קצוות (בחישה שלנו יש שלשה מלבנים של חמש חציות). מהגדרת התנאי ההכרחי (תכונה רביעית) מתברר שלחידה זו פשוט אין פתרון.

זו סגולה נוספת של גישת חשיבה שכזו - אם אין פתרון ניתן להגיע למסקנה זו בשלב מוקדם יחסית של הניתוח. מה שמיוחד לא פחות הוא שחיפוש אחר פתרון והוכחה שאין כזה בנמצא מתבצעים באותה שיטת ניתוח בדיוק! יעילות החשיבה לא נפגמת, אך המידע שאין פתרון לבעיה לעתים לא יסולא בפז.

קוריוז

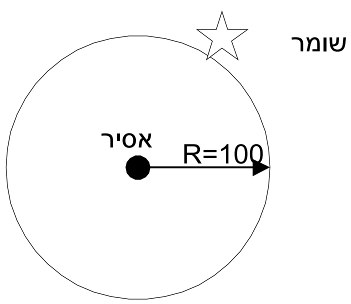
המתמטיקאי הנודע פרדריך גאוס פתר חידה זו בהציעו פתרון תלת ממדי - בעזרת יציאה מהמישור ניתן לשוב לאותו מלבן מבלי לחצות את צלעותיו. מבלי לפגוע בגדולתו של גאוס ארשה לעצמי בצניעות להעיר כי זהו איננו פתרון אלגנטי משום שכעת החידה הופכת להיות חסרת כל קושי ובעלת אינסוף פתרונות. לא אסתכן מידי אם אשער כי המחשבה על פתרון תלת ממדי חלפה בראשם של מרבית הקוראים ונפסלה על סמך הטיעון כי "לבטח זו לא הייתה כוונתו של הכותב".

תרגילי בית

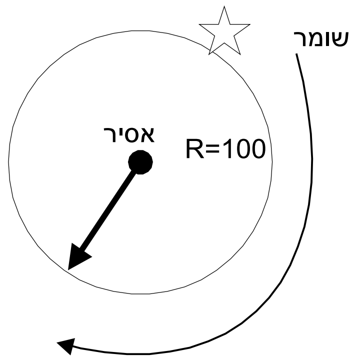
1) ארוכה הדרך אל החופש

חונכנו על ברכי התפיסה המקדשת את הקו הישר כדרך הקצרה ביותר בחידה זו נשאל: לאן הוא מוביל?

במרכזה של בריכה עגולה בעלת רדיוס של 100 מטר נמצא אסיר בסירה. מהירות שיוטו - 1 מ/ש. שומר מטייל על שפת הבריכה, מהירותו 4 מ/ש. לשומר קשר עין עם האסיר ומטרתו למנוע מהאסיר להגיע לגדה. אם יגיע האסיר לגדה חלקיק שניה לפני השומר מהירותו תגדל והוא ימצא דרכו לחופש. האם יש לאסיר אפשרות להימלט.



התשובה האינטואיטיבית היא כי לאסיר אין סיכוי לצאת אלא אם יירדם השומר או ינהג שלא בתבונה. לרוב תשובה זו נובעת מבדיקה קצרה ומסקנה של "קל וחומר" בסופה: מכיוון שהאסיר איטי יותר עליו לנוע בדרך הקצרה ביותר דהינו קוו ישר. "למזלו" של האסיר מצב זה יגרור את השומר לדרך הארוכה ביותר כיוון שעליו לפגוש את האסיר בנקודה הרחוקה ביותר מעמדתו.



חישוב קצר מראה שדרכו של האסיר היא 100 מטר ואילו דרכו של השומר היא (בערך):
$2*\pi*R/2=100\pi\cong 314$

מכיוון שמהירותו של השומר גבוהה פי 4 ממהירות האסיר הרי שהוא יגיע לנקודת ההמלטות של האסיר לפניו, וימנע את בריחתו.

קיצור הדרך (השגוי) למסקנה מבוסס על טענת קל וחומר: "אם בדרכו הקצרה ביותר לא הצליח האסיר קל וחומר אם יתחיל להאריך את דרכו". ובאמת במספר ניסוים מחשבתיים מתברר שכל תסריט בו האסיר מאריך את דרכו נגמר בתוצאה העגומה (מבחינתו).

הטעות קשורה להנחה, לטיעון קל וחומר ולחשיבה על תנאים מספיקים לפתרון החידה במקום לחשוב על תנאים הכרחיים. נכון הוא שקו ישר מקצר את דרכו של האסיר אך מה שחשוב כאן הוא היחס בין דרכו של האסיר ודרכו של הגנב.

2) איפה הצפון?

בחידה (ידועה למדי) זו יש למצוא על פני כדור הארץ נקודה המקיימת את התנאי הבא: "אם תלך ממנה 360 ק"מ דרומה, ואח"כ 360 ק"מ מזרחה ואח"כ 360 ק"מ צפונה תשוב לאותה נקודה בדיוק".

תשובה מקובלת והתשובה האמיתית

תשובת מרבית הנשאלים מהירה והחלטית - "זהו הקוטב הצפוני". תשובה זו נכונה; מכיוון שכל כיוון מצפני מהקוטב הצפוני מוגדר כ"דרומה", הרי ששמירה על קווי אורך ורוחב לפי הנתונים המפורטים בהכרח מחזירים את הצועד לאותה נקודה. חידה מסוג זה חד שרלוק הולמס לידידו דוקטור ווטסון. שם היה מעורב דוב והחידה עסקה בצבע פרוותו: דובי הקוטב הצפוני לבנים.

אולם לחידה בנוסח המקורי (ללא הדובים) יש אינסוף פתרונות.

רמז: אין דובים בנקודות הנ"ל.