

**מבחן סיום בקורס: (52789) שיטות חישוביות בתכנון לא ליניארי**

**מבחן בית**

תאריך הבחינה: 29.1.07

**משך המבחן:** ניתן לאסוף את המבחן מן המזכירות לסטטיסטיקה או להורידו מן הרשת החל בשעה 9:00 בבוקר. יש להגישו בתוך 76 שעות.

**דרך ההגשה:** ניתן להגיש את הפתרון במזכירות לסטטיסטיקה או לשלוח אותו כקובץ ב-attachment לכתובת הדואר האלקטרוני שלי (msby@msec.huji.ac.il) **חומר מותר בשימוש:** לא מוגבל.

**הוראות:** יש לענות על חלק א' ועל שניים מתוך שלוש השאלות של חלק ב'. יש לנמק (בקיצור) כל אמירה. העבודה הינה עבודה אישית. אין להעזר באף אדם, להוציא אותי, כדי להשלימה. אותי ניתן לשאול שאלות הבהרה בלבד באשר לנוסח השאלות במבחן. ניתן ליצור איתי קשר לשם כך על ידי משלוח דואר אלקטרוני בכתובת הרשומה למעלה, או להתקשר בטלפון (03-9626946, 052-3881255). בהצלחה.

**חלק א: תכנות (50%)**

1 היעד בשאלה זו הוא תכנות פונקציה שמזערת את פונקציה המטרה  $f(x) = -\sum_{i=1}^d \log(x_i)$  תחת האילוץ הליניארי  $Ax = b$ , בעבור מטריצה  $A$  מדרגה מלאה ובעבור וקטור נתון  $b$ . לצורך כך ניתן להעזר בעובדה כי האלגוריתם של ניוטון מחשב את הצעד ה- $n+1$   $x_{n+1} = x_n + \Delta_n$  על ידי פיתרון המערכת

$$\begin{bmatrix} \ddot{f}(x_n) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{f}(x_n) \\ 0 \end{bmatrix}$$

למציאת ערכו של  $\Delta_n$ .

1. כיתבו פונקציה שמקבלת כקלט נקודת התחלה, מטריצה, וקטור  $b$ , מספר מירבי של איטרציות וסף התכנסות ומוציאה כפלט את נקודת המינימום של הפונקציה הנתונה ואת מספר האיטרציות שנידרשו עד להתכנסות. השתמשו בכלל סביר לביקורת התכנסות, למשל  $\|\Delta_n\|_\infty < \varepsilon / d$ , בעבור סף התכנסות  $\varepsilon$ .

2. הפעילו את הפונקציה שמצאתם בעבור המקרה בו  $A = [1, 1, \dots, 1]$  היא מטריצה בעלת שורה אחת ובו  $b = 1$  הוא סקלר. במקרה זה ידוע כי הפיתרון ניתן עלידי ההתפלגות הדיסקרטית האחידה. כמה איטרציות נדרשות להתכנסות כאשר נקודת התחלה היא התפלגות  $\frac{1}{c}, \frac{2}{c}, \dots, \frac{d}{c}$ , כאשר  $c$  מבטיח שנקודת התחלה מקיימת את האילוצים, ובעבור  $d = 10$ ,  $d = 100$  ו- $d = 1000$ ?

**חלק ב: תיאוריה (50%) (פתור 2 שאלות בלבד!)**

2 תהי  $A$  מטריצה ריבועית וסימטרית ויהי  $c$  וקטור. בעית אופטימיזציה שיש לפתור בהקשר של סטטיסטיקה עמידה (robust) ניתנת לרישום בצורה:

$$\begin{aligned} \min \quad & x'Ax \\ \text{s.t.} \quad & (c + \delta)'x = 1, \quad \|\delta\|^2 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

כאשר  $x$ -ו  $\delta$  הם וקטורים לא ידועים שמעוניינים לזהות,  $\|\cdot\|$  הוא הנורמה האוקלידית ו- $\varepsilon$  הוא גודל חיובי נתון. רשום את תנאי קון-טקר (Kohn-Tacker) והסק כי  $\delta$  שווה למכפלה של  $x$  בקבוע וריבוע הנורמה שלו שווה ל- $\varepsilon$ .

3 נתונה בעית מזעור של הפונקציה:  $f(x, y) = x^3 + \frac{y^3}{3} - x^2 - \frac{y^2}{2} + xy - 10x - 4y$ .

1. הראו כי הנקודה  $(2, 2)$  היא נקודת מינימום לוקלי.
2. השלימו את האיטרציה הראשונה של האלגוריתם של ניוטון המתחילה מהנקודה  $(0, 0)$ . מה תוכלו לומר על הכיוון שאליו האלגוריתם מציע ללכת?

4 יהי  $m$  מספר טבעי שלם וזוגי. ברור כי לפונקציה  $f(x) = x^m$  יש מינימום יחיד בנקודה  $x^* = 0$ .

1. הראו כי בעבור  $m > 2$  קצב ההתכנסות של האלגוריתם של ניוטון הוא לינארי.
2. נמקו כיצד מתישבת דוגמא זו עם הטענה, שהוכחה בכיתה, כי קצב ההתכנסות של האלגוריתם של ניוטון הוא ריבועי.