

האוניברסיטה העברית

המחלקה לסטטיסטיקה

מבחן סיום בקורס: **(52640) ניתוח סדרות עיתיות**

תאריך הבחינה: 1.2.2011, שעה 9:00 (מועד א)

משך המבחן: 3 שעות

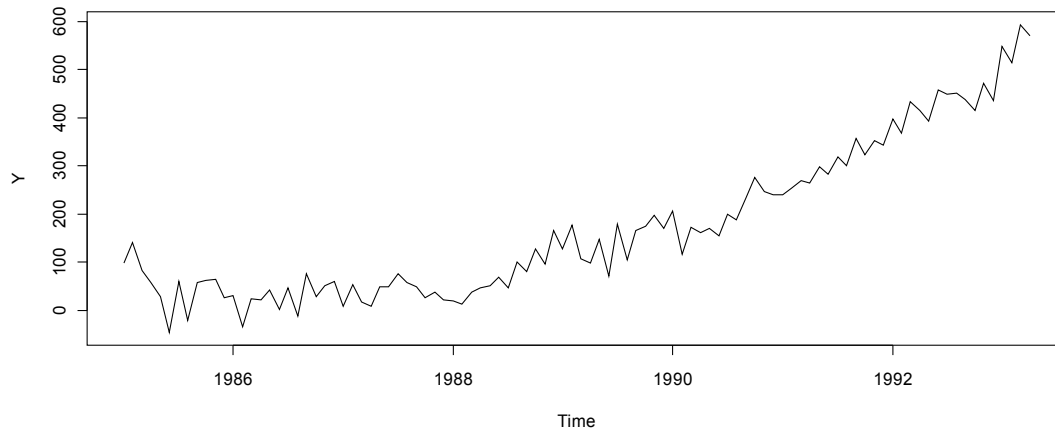
חומר מותר בשימוש: 4 דפים כתובים בכתב ידו של הסטודנט. מחשבון.

הוראות: יש לענות על שאלה 1 שבחלק א' (33% מהציון) ועל 2 מתוך 3 השאלות 2-4 שבחלק ב' (66% מהציון). יש לנמק (בקיצור) כל אמירה. בהצלחה!

חלק א (ענו על שאלה 1)

שאלה 1

בגרף שלהלן מתוארים נתונים על מדד מסוים שנאספו במשך 100 חודשים עוקבים החל מינואר, 1985:



שתי גישות מוצעות לניתוח הנתונים. בגישה האחת יוצרים את סידרת ההפרשים של ההפרשים (SARIMA במודל $D=0$ ו- $d=2$) ומתאימים גורמים של ממוצע נע (MA) ושל אוטורגרסיה (AR) לסדרה המתקבלת, בעבור המרכיבים העונתיים והמרכיבים שאינם עונתיים. להלן אומדי המקדמים של המודל שהתקבל כתוצאה של מזעור מדד ה-AIC. האות a מסמלת אוטורגרסיה והאות b מסמלת ממוצע נע. בסוגריים, סטיות התקן של האומדים:

a1	b1	seasonal a1	seasonal b1	seasonal b2
-0.6714	-0.9541	-0.6905	0.9345	0.4477
(0.0746)	(0.0298)	(0.1662)	(0.1805)	(0.2064)

AIC = 970.48

הגישה השנייה מתאימה פולינום ריבועי כמודל רגרסיה לנתונים. מודל ARMA מותאם לשאריות הרגרסיה תוך מזעור מדד ה-AIC. להלן אומדי המקדמים של מודל ה-ARMA:

a1	a2	b1	b2
0.0310	-0.1940	0.0909	0.9741
(0.1056)	(0.1208)	(0.0342)	(0.1220)

AIC = 940.98

1. תארו את הפילטר שפועל על התצפיות והפילטר שפועל על הרעש הלבן במודל שהותאם לנתונים בגישה הראשונה. כמה מקדמים שונים מאפס יש בכל אחד משני הפילטרים?
2. מדוע, לדעתכם, הופעל בגישה הראשונה פילטר ההפרשים המתאים ל- $d=2$?
3. רשמו בצורה מפורשת את הפילטר שמופעל על שאריות הרגרסיה ואת הפילטר המופעל על הרעש הלבן במודל שהותאם בגישה השנייה.
4. תארו בצורה מפורשת את הפעולות החישוביות שיש לבצע כדי לבדוק האם המודל שהותאם בגישה השנייה הפיך. תארו באופן דומה את הפעולות שיש לבצע כדי לבדוק האם המודל סטציונרי.
5. איזה משני המודלים תעדיפו. נמקו את בחירתכם.

חלק ב (ענו על 2 מבין 3 השאלות הבאות)

שאלה 2

- סדרת תצפיות $Y_1, Y_2, \dots$ מוגדרת באופן הבא: Y_1 עשוי לקבל את הערך 1 או את הערך -1 בהסתברויות שוות. שאר התצפיות מוגדרות באופן רקורסיבי: $Y_t = -Y_{t-1}$ בעבור $t=2,3,\dots$.
1. רשמו את התוחלת ואת השונות של כל אחד מן המשתנים בסדרה. חשבו את מקדם המתאם בין כל זוג משתנים בסדרה.
 2. האם הסדרה הנתונה הינה סטציונרית?
 3. מהו התהליך המתקבל מההפעלה של הפילטר $c_0=0.5, c_{-1}=-1, c_{-2}=0.5$ על הסדרה של התצפיות?

שאלה 3

- התהליך Y_t מוגדר על ידי הפעלת פילטר על רעש לבן. שונות רכיבי הרעש הלבן היא $\sigma^2=1$. מקדמי הפילטר המתאימים לאינדקסים שליליים מתאפסים. (כלומר, התהליך הוא פונקציה של הרעש הלבן בהווה ובעבר, אך לא של הרעש הלבן בעתיד. פונקציית השונות הסדרתית $\gamma(k)$ מקיימת כי $\gamma(1)=4$, $\gamma(2)=1$, ו- $\gamma(k)=0$ בעבור $k>2$. נתון כי המקדם המתאים בפילטר לאינדקס 0 שווה ל-1 וכי מספר המקדמים השונים מאפס בפילטר הוא סופי.
1. חשבו את מקדמי הפילטר ואת $\gamma(0)$.
 2. האם התהליך סטציונרי? האם התהליך הפיך?

שאלה 4

- מודל רגרסיה מוגדר בעזרת המשוואה $Y_t = a + bX_t + \eta_t$, בעבור $t=1,2,\dots,n$. צופים בסדרת התצפיות Y . נתון כי סדרת המשתנה X מתפלגת כתהליך $AR(1)$ ומקיימת את הרקורסיה $X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t$. השארית η של מודל הרגרסיה מתפלג כתהליך $MA(1)$ ומקיים $\eta_t = \psi Z_{t-1} + Z_t$. המשתנים Z והמשתנים ε בלתי תלויים, בעלי תוחלת 0 ובעלי שונות 2.25 ו-9, בהתאמה.
1. רשמו את המערכת המתוארת כמערכת מצב-מרחב. תארו באופן מלא את המטריצה X ואת מטריצת השונות המשותפת Σ של משוואת המרחב וכן את המטריצה T ומטריצת השונות המשותפת Q של משוואת המצב.
 2. חושבו אומדים ל- X_n ול- η_n על סמך סדרת התצפיות $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ תוך שימוש בפילטר של קלמן (Kalman Filter). מהו הניבוי ל- Y_{n+2} על סמך n התצפיות הראשונות? מהי הטעות הריבועית (MSE) של הניבוי?