<u>ניתוח סדרות עתיות</u>

<u>תרגיל מספר 9</u>

פתרון שאלה 1

עבור מודל $ARMA(1,1)$, $(1-\phi B)Y_t = (1+\theta B)\varepsilon_t$, $\rho_1 = \dfrac{(1+\phi\theta)(\phi+\theta)}{1+\theta^2+2\phi\theta}$

$\rho_2 = \phi\rho_1$ ו- $\gamma_0 = \dfrac{1+\theta^2+2\phi\theta}{1-\phi^2}\sigma_\varepsilon^2$ לכן: $\phi = \dfrac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_1} = \dfrac{.418}{.523} = 0.8$

הצבת $\hat{\phi}$, $\hat{\rho}$ בביטוי של ρ_1 נותנת:

$$.523 = \frac{(1+.8\theta)(.8+\theta)}{1+\theta^2+1.6\theta} \Rightarrow .523+.523\theta^2+.84\theta = .8+1.64\theta+.8\theta^2$$

$$.28\theta^2+.8\theta+.28 = 0 \Rightarrow \theta_1 = -.41,\ \theta_2 = 2.45$$

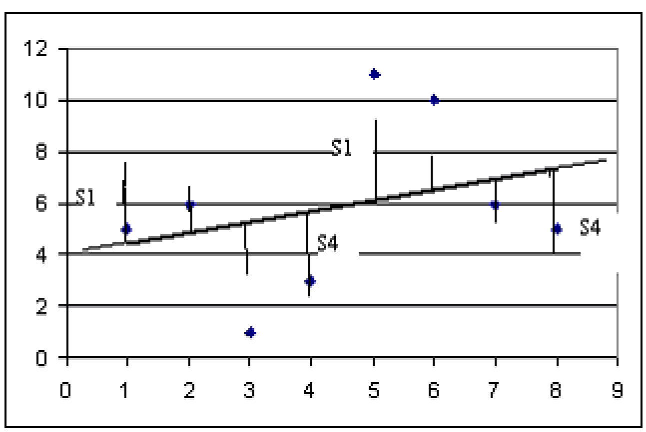
לשים לב כי רק $\theta_1 = -.41$ פתרון אינורטיבילי.

הצבת $\hat{\phi}$, $\hat{\theta}$ ו- $\hat{\gamma}_0$ במשוואה של γ_0 נותנת:

$$10 = \frac{1+(-.41)^2-2\times .41\times .8}{1-.8^2}\sigma_\varepsilon^2 = 1.42\sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 7.03$$

פתרון שאלה 2

i. ציר ה-X הוא זמן t, ציר ה-Y הן Z_t. הקו הוא: $Y_t = \alpha + \beta t$. התצפיות (הנקודות) הן Z_t. כל קו אנכי מבטא עונתיות: S_1, S_2, S_3, S_4 כאשר $S_t = S_{t+4}$ לכל t , ε_t רעש לבן



.ii $W_t = Z_t - Z_{t-4} = \alpha + \beta t + S_t + \varepsilon_t - \alpha - \beta(t-4) - S_{t-4} - \varepsilon_{t-4} = 4\beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-4}$

ל- W_t תוחלת קבוע 4β. נסמן: $\mu = 4\beta$: $W_t = \mu + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-4} \Rightarrow W_{t-4} = \mu + \varepsilon_{t-4} - \varepsilon_{t-8}$

$Cov(W_t, W_{t-4}) = -Cov(\varepsilon_{t-4}, \varepsilon_{t-4}) = -\sigma_\varepsilon^2$

$Var(W_t) = Var(W_{t-4}) = 2\sigma_\varepsilon^2$

ומתאם יחיד שונה מאפס $\rho_4 = \frac{-\sigma_\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2} = -\frac{1}{2}$ שלא תלוי ב-t לכן סטציונרית.

$Z_t \sim SARIMA(0,0,0,)(0,1,1)_4$, $\rho_4 = -\frac{1}{2}$, $\rho_k = 0$ עבור $k \neq 0,4$

הסדרה אינה אינורטיבילית : שורשי הפולינום $1 - 1B^4 = 0$ הם: 1, ו- 1- (ושורשים מורכבים i ו-(i-)).

.iii $W_t = Z_t - Z_{t-4} = \mu + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-4}$. נאמוד את μ ע"י $\overline{W}$:

$$W_5 = 19 - 17 = 2, W_6 = 24 - 17 = 7, W_7 = 16 - 12 = 4, W_8 = 13 - 7 = 6 \Rightarrow \overline{W} = \frac{19}{4} = 4.75$$

$$\hat{W}_9 = W_8(1) = E(W_9 \mid W_8 W_7 \ldots) = E(\mu + \varepsilon_9 - \varepsilon_5 \mid W_8 W_7 \ldots)$$
$$= \mu - E(\varepsilon_5 \mid W_8 W_7 \ldots) = \mu - \hat{\varepsilon}_5 = \mu - (W_5 - \hat{W}_4(1))$$

אין לנו תצפיות $W_1 \ldots W_4$ לכן תחזית טובה ביותר של W_5 כאשר אין תצפיות קודמות הוא $\hat{\mu}$ ולכן:

$$W_8(1) = \hat{\mu} - (W_5 - \hat{\mu}) = 2\hat{\mu} - W_5 = 2\overline{W} - W_5 = 9.5 - 2 = 7.5$$

$\hat{Z}_9 = \hat{Z}_8(1) = \widehat{Z_9 - Z_5} + Z_5 = W_8(1) + Z_5 = 7.5 + 19 = 26.5$. חיזוי W_{10} ו- Z_{10} באופן דומה.

.iv ניתן פשוט להתאים מודל רגרסיה לתצפיות (קבוע +3 משתני דמי לעונתיות(ולקבל תחזיות ממודל זה.

כלומר נגדיר $\gamma_{it} = \begin{cases} \gamma_0 & t = 4k \\ \gamma_1 & t = 4k+1 \\ \gamma_2 & t = 4k+2 \end{cases}$ ומודל

$$Z_t = \alpha + \beta t + \gamma_{it} S_t + \varepsilon_t, \quad i = 0,1,2 \quad t = 1,2,\ldots T$$

יתרון מודל SARIMA: יש לאמוד 2 פרמטרים בלבד (θ של MA עונתי ושונות σ_ε^2). מפסידים אבל 4 תצפיות בגלל ההפרש מסדר 4 ובעצם המודל אינו אינורטיבילי ותחזיות לא משמעותיות.

יתרון מודל רגרסיה: לא מפסידים תצפיות בגלל החסרה – אין בעיות של אינורטיביליות. יש אבל לאמוד 5 פרמטרים (3 מקדמי עונתיות, מקדם הזמן β ושונות σ_ε^2)

פתרון שאלה 3:

$$f(X_1,...,X_N)=\prod_{t=2}^{N} f(X_t\mid X_{t-1})f(X_1)=\prod_{t=2}^{N}\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp[-\frac{(X_t-\phi X_{t-1})^2}{2\sigma^2}]\}f(X_1)$$

$$\log(f(\phi,\sigma^2;X_1,...,X_N))=-\frac{N-1}{2}\log(2\pi)-\frac{N-1}{2}\log(\sigma^2)$$
$$-\sum_{t=2}^{N}\frac{(X_t-\phi X_{t-1})^2}{2\sigma^2}+\log f(X_1)$$

שימו לב שכאשר מתנים בערך X_1 לכן $\log f(X_1)$ מספר קבוע. על כן, יש למקסם את:

$l(\phi,\sigma^2)=-\frac{N-1}{2}\log(\sigma^2)-\sum_{t=2}^{N}\frac{(X_t-\phi X_{t-1})^2}{2\sigma^2}$. בגזירה לפי ϕ ו- σ^2 מתקבלות הנגזרות

החלקיות: $\frac{\partial l(\phi,\sigma^2)}{\partial\phi}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=2}^{N}(X_t-\phi X_{t-1})X_{t-1}$, $\frac{\partial l(\phi,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\frac{N-1}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{t=2}^{N}(X_t-\phi X_{t-1})^2$

השוואת 2 הנגזרות החלקיות לאפס ופתרון המשוואות נותנת: $\hat{\phi}=\frac{\sum_{t=2}^{N}X_tX_{t-1}}{\sum_{t=2}^{N}X_{t-1}^2}$ ו-

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}(X_t-\hat{\phi}X_{t-1})^2=\frac{1}{N-1}[\sum_{t=2}^{N}X_t^2-(\sum_{t=2}^{N}X_tX_{t-1})^2/\sum_{t=2}^{N}X_{t-1}^2]$$