האוניברסיטה העברית בירושלים
המחלקה לסטטיסטיקה

מבחן בקורס **ניתוח סדרות עתיות** 52640
תשס"ט, סמסטר א', מועד א'

שם המורה: פרופ' דני פפרמן

תאריך המבחן: יט' בשבט , תשס"ט, 13.02.2009

משך המבחן:**2.5 שעות + חצי שעה הארכה**

<u>ענו על 3 בלבד מתוך 5 השאלות הבאות</u>. אין לצבור סעיפים מיותר מאשר 3 שאלות.

<u>שאלה 1</u> (34 נקודות)

לסדרת נתונים סטציונרית $\{X_t\}$ בת 120 תצפיות עם תוחלת $\mu_X = E(X_t) = 5.8$ הותאם המודל $SARIMA\,(1,0,0)(0,0,1)_{12}$. בטבלה להלן מוצגים 15 הנתונים האחרונים של הסדרה וכן 15 השאריות האחרונות בהתאמת מודל זה.

t	106	107	108	109	110	111	112	113	114
X_t	5.48	5.86	6.43	5.76	6.13	5.98	5.57	6.13	5.34
$\hat{\varepsilon}_t$	-0.005	.028	.167	-.116	-.018	-.275	-.354	.180	-.281

t	115	116	117	118	119	120
X_t	4.99	5.16	5.22	5.59	5.68	6.21
$\hat{\varepsilon}_t$	.445	.391	.314	-.098	-.341	-.202

1.1 (10 נק')- נניח כי $\phi_1 = 0.5$, $\theta_{12} = 0.5$. רשמו את הצורה המפורשת של המודל כפונקציה של תצפיות קודמות ושאריות קודמות (הצגה כללית, $X_t = ...$). הניחו שבהצגה הכללית של מודל SARIMA מופיע הסימן "-" לפני מקדמי MA, כך שלמשל מודל MA(1) עם $\theta = -.5$ ייכתב, $Y_t = \varepsilon_t - (-.5)\varepsilon_{t-1} = \varepsilon_t + .5\varepsilon_{t-1}$.

1.2 (12 נק')- חשבו את מקדם המתאם $Corr[X_t, X_{t-1}]$ ואת השונות $Var(X_t)$, אם ידוע $E(X_{t-1}\varepsilon_{t-12}) = 0.05$ ו $\sigma_\varepsilon^2 = 0.25$. פרטו את שלבי החישוב.

1.3 (12 נק') - חשבו תחזית בזמן t=120 ל X_{122}, ואת שונות טעות התחזית.
$Var[e_{120}(2)] = Var[X_{122} - \hat{X}_{120}(2)]$. (<u>עזרה</u>: חשבו תחילה את טעות התחזית תחת המודל)

<u>שאלה 2</u> (34 נקודות)

לסדרת נתונים בעלת 60 תצפיות הותאם המודל, $Y_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{6}[\alpha_k \cos(\frac{2\pi k}{12}t) + \beta_k \sin(\frac{2\pi k}{12}t)] + \varepsilon_t$

באשר $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ סדרת רעש לבן. בטבלה להלן נתונים אומדני המקדמים α ו β עבור אורכי המחזורים $P_k = 12/k$ (תדירויות $\lambda_k = 2\pi k/12$), $k = 1...6$; כפי שחושבו מתוך הנתונים המקוריים, וכן מתוך השאריות הנאמדות על סמך מודל שהותאם לנתונים המקוריים.

<u>אורכי מחזור</u>

סדרה	מקדמים	12	6	4	3	2.4	2
מקורית	$\hat{\alpha}_k$	-1.07	0.63	1.34	-0.93	0.52	0.1
מקורית	$\hat{\beta}_k$	0.61	0.01	1.47	-1.61	0.58	-
שאריות	$\hat{\alpha}_k$	-1.07	0.63	0	0	0.52	0.1
שאריות	$\hat{\beta}_k$	0.61	0.01	0	0	0.58	-

בהתאמת המודל לנתונים המקוריים התקבל גם: $S^2(\hat{\sigma}^2) = 7.65$, $\hat{\alpha}_0 = 3.49$.

2.1 (12 נק')- מהו המודל החסכוני ביותר המתאים לנתונים? (כלומר על אילו אורכי מחזור ניתן לוותר, אם בכלל)? בדקו ונמקו. (התבססו על 2 השורות הראשונות בטבלה. בצעו כל מבחן ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$). האם לאור בדיקותיכם קיים בסדרה מרכיב החוזר על עצמו כל 8 חודשים? נמקו.

2.2 (10 נק')- רשמו וחשבו סטטיסטי מבחן לבדיקת ההשערה שהמודל שמצאתם בסעיף 2.1 מתאים לנתונים. מה מסקנתכם אם רמת מובהקות המבחן היא $\alpha = 0.05$? (<u>עזרה</u>: התבססו על 2 השורות האחרונות בטבלה.)

2.3 (12 נק')- מה תהיה תחזיתכם ל Y_{61} ע"ס המודל שבחרתם בסעיף 2.1? מהי התצפית הבאה (לאחר Y_{61}) שתהיה לה אותה תחזית כמו ל Y_{61}? מה יהיה אומדן לשונות של החזאי, כלומר, $V\hat{a}r(\hat{Y}_{61}) = \hat{E}[\hat{Y}_{61} - E(\hat{Y}_{61})]^2$? (<u>עזרה</u>: מקדמי הרגרסיה בלתי תלויים תחת המודל.)

<u>שאלה 3</u> (34 נקודות)

בחברה תעשייתית קיים רישום של מספר ימי העבודה, X_t, שאינם מנוצלים ברבע שנה נתון. מספרי הימים שנצפו בשנים 2006-2007 היו כדלהלן:

שנה	רבע 1	רבע 2	רבע 3	רבע 4
2006	85	100	44	105
2007	76	84	39	90

3.1 (12 נק')- מה יהיו האומדנים לרמה, השיפוע והאפקטים העונתיים בזמן $t = 8$ תוך שימוש בהחלקה מעריכית חיבורית, אם בזמן $t = 7$, $\hat{L}_7 = 76,\ \hat{R}_7 = 0,\ \hat{S}_7^{(1)} = 4,\ \hat{S}_7^{(2)} = 15,\ \hat{S}_7^{(3)} = -35,\ \hat{S}_7^{(4)} = 16$.
($\hat{S}_7^{(i)}$ מבטא את ההשפעה העונתית לרבע i כפי שחושבה בזמן $t = 7$). השתמשו במקדמי החלקה $\alpha = 0.1$ (רמה), $\gamma = 0.1$ (שיפוע), ו $\delta = 1$ (עונתיות).

<u>משוואות החלקה מעריכית</u>:

$$L_{t+1} = \alpha\left(X_{t+1} - S_t^{t+1}\right) + (1-\alpha)(L_t + R_t) \quad ; \quad R_{t+1} = \gamma(L_{t+1} - L_t) + (1-\gamma)R_t$$

$$S^{*\,t+1}_{t+1} = \delta(X_{t+1} - L_{t+1}) + (1-\delta)S_t^{t+1} \quad ; \quad \sum_{i=0}^{s-1} S_{t+1}^{t+1+i} = 0$$

3.2 (10 נק')- מהם השיקולים להעדפת החלקה מעריכית חיבורית על פני החלקה מעריכית כפלית? מה ניתן להסיק מערכי מקדמי ההחלקה? מה תהייה התחזית של X_9 (ערך הסדרה עבור הרבע הראשון של שנת 2008) בזמן $t=7$? מה תהייה התחזית של X_9 בזמן $t=8$?

3.3 (12 נק')- סטודנט שהשתתף בקורס ניתוח סדרות עתיות מצא שסדרת ההפרשים $Y_t = X_t - X_{t-4}$ בסדרה של שאלה זו מתנהגת לפי המודל $Y_t = 0.6Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$. רשמו את המודל בהצגה הכללית של המודל SARIMA וחשבו את התחזית של X_9, אם התחזית צעד אחד קדימה של $Y_8 = X_8 - X_4$ הייתה $\hat{Y}_{8|7} = -21$. (עזרה: חשבו תחילה $\hat{Y}_{9|8}$).

שאלה 4 (34 נקודות)

יהי נתון המודל $y_{ti} = \mu_{ti} + \varepsilon_{ti}$, $\mu_{ti} = \mu_{t-1,i} + \eta_{ti}$; $i=1,2,\ t=1,2,...$ (2 תצפיות בכל נקודת זמן, y_{t1}, y_{t2}, עם תוחלות μ_{t1}, μ_{t2} בהתאמה). נניח כי $Var(\varepsilon_{ti}) = \sigma_\varepsilon^2, Var(\eta_{ti}) = \sigma_\eta^2$ וכן $Cov(\varepsilon_{t1}, \varepsilon_{t2}) = C_\varepsilon, Cov(\eta_{t1}, \eta_{t2}) = 0$. נסמן $y_t = \begin{pmatrix} y_{t1} \\ y_{t2} \end{pmatrix}$ ו $\mu_t = \begin{pmatrix} \mu_{t1} \\ \mu_{t2} \end{pmatrix}$.

4.1 (10 נק')- רשמו את המודל כמודל מצב מרחב. הגדירו את כל המטריצות והווקטורים הנדרשים.

4.2 (12 נק')- נניח שבזמן $t=1$ אומדים, $\hat{\mu}_{1i} = y_{1i}$, $i=1,2$. חשבו את מטריצת השונויות

$$P_1 = E\left[\left(\begin{pmatrix} \hat{\mu}_{1,1} \\ \hat{\mu}_{1,2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_{1,1} \\ \mu_{1,2} \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} \hat{\mu}_{1,1} \\ \hat{\mu}_{1,2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_{1,1} \\ \mu_{1,2} \end{pmatrix}\right)'\right].$$

4.3 (12 נק')- חשבו תחזית $\hat{y}_{2|1} = \begin{pmatrix} \hat{y}_{2|1,1} \\ \hat{y}_{2|1,2} \end{pmatrix}$ ל y_2 בזמן $t=1$ ואת מטריצת השונויות של התחזיות,

$$F_2 = E\left[\left(\begin{pmatrix} \hat{y}_{2|1,1} \\ \hat{y}_{2|1,2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{2,1} \\ y_{2,2} \end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix} \hat{y}_{2|1,1} \\ \hat{y}_{2|1,2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{2,1} \\ y_{2,2} \end{pmatrix}\right)'\right]$$

נוסחאות כלליות:

משוואת תצפיות

$$Y_t = X_t\beta_t + \varepsilon_t;\ E(\varepsilon_t) = 0,\ E(\varepsilon_t\varepsilon_t') = \Sigma,\ E(\varepsilon_t\varepsilon_{t*}') = 0 \text{ for } t \neq t*$$

משוואת מעבר

$$\beta_t = T\beta_{t-1} + \eta_t\ ;\ E(\eta_t) = 0,\ E(\eta_t\eta_t') = Q,\ E(\eta_t\eta_{t*}') = 0 \text{ for } t \neq t*$$

$$E(\varepsilon_t\eta_{t*}') = 0 \text{ for all } (t,t*)$$

$$P_t = E[(\hat{\beta}_t - \beta_t)(\hat{\beta}_t - \beta_t)'];\ P_{t|t-1} = TP_{t-1}T' + Q,\ E[(\hat{Y}_{t|t-1} - Y_t)(\hat{Y}_{t|t-1} - Y_t)'] = X_tP_{t|t-1}X_t' + \Sigma = F_t.$$

<u>שאלה 5</u> (34 נקודות)

5.1 (10 נק')- בהתאמת מודל $SARIMA\,(1,0,0)(1,0,0)_4$ לסדרה בת 100 נתונים חושבו 12 מקדמי המתאם הראשונים של השאריות והתקבלו הערכים הבאים:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ρ_k	-.24	-.11	-.13	-.06	.04	.05	-.02	-.04	.04	-.04	-.005	-.05

עד כמה מתאים המודל לנתונים? חשבו לפחות סטטיסטי מבחן אחד לבדיקת טיב המודל. במידה ואתם דוחים את ההשערה שהשאריות מתנהגות כמו רעש מקרי, כיצד ניתן לתקן את המודל המקורי? רשמו את המודל המתוקן.

5.2 (12 נק')- נתון המודל $Y_t = 5 + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1};\ Var(\varepsilon_t) = 2$. חשבו את אומד ה Power Spectrum, $\hat{f}(\lambda)$, עבור מודל זה אם משתמשים במשקלות של Parzen. מה תהיה ההטיה והשונות בשימוש בחלון זה עבור $\lambda = 0.5\pi$ אם $M = 10$ ו $T = 60$?

נוסחאות לעזרה:

$$\mathrm{f}(\lambda) = \pi^{-1}[\gamma_0 + 2\sum_{\tau=1}^{\infty}\gamma_\tau \cos\lambda\tau] \quad ; \quad w_K(\text{Parzen}) = \begin{cases} 1-6\left(\dfrac{k}{M}\right)^2 + 6\left(\dfrac{k}{M}\right)^3 & 0 \le k \le M/2 \\ 2\left(1-\dfrac{k}{M}\right)^3 & \dfrac{M}{2} \le k \le M \\ 0 & k > M \end{cases}$$

Window	Bias	$\mathbf{Tvar}\{\hat{f}(\lambda)\}/\mathbf{M}f^2(\lambda)$
Parzen	$\dfrac{6}{M^2} f''(\lambda)$	0.54

5.3 (12 נק')- בדקו האם הממוצע הנע M: [0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2] משחזר מגמה המתנהגת לפי הפולינום $L_t = 10 + 5t - 0.5t^2$. (<u>עזרה</u>: נח לסמן 5 ערכים רצופים של המגמה על ידי $L_{t-2}, L_{t-1}, L_t, L_{t+1}, L_{t+2}$, ואז יש לבדוק אם הממוצע הנע נותן את הערך הנכון עבור הערך במרכז, כלומר שווה ל L_t.) נניח סדרת נתונים המתנהגת לפי המודל $Y_t = L_t + \varepsilon_t$ באשר L_t מוגדר כנ"ל ו ε_t רעש לבן עם שונות $\sigma_\varepsilon^2 = 5$. מה תהיה ההטיה והשונות אם נאמוד את L_t על ידי הממוצע הנע הנ"ל מחושב על הסדרה Y_t, כלומר $\hat{L}_t = 0.2Y_{t-2} + 0.2Y_{t-1} + \ldots + 0.2Y_{t+2}$?

בהצלחה

$$(1-\varphi_1 B)X_t = (1-\theta_{12}B^{12})\varepsilon_t + \mu \qquad 1.1 \qquad 1$$

$$X_t = 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-12} + \mu$$

$$EX_t = \mu + 0.5EX_{t-1} \Rightarrow \mu = 0.5EX_t = 2.9$$

$$X_t = 2.9 + 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-12}$$ ואכן: ⇐

1.2

$$\operatorname{cov}(X_t, X_{t-1}) = \operatorname{cov}(2.9 + 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-12}, X_{t-1}) =$$

$$= 0.5\operatorname{Var}(X_{t-1}) + \operatorname{Cov}(\varepsilon_t, X_{t-1}) - 0.5\operatorname{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_{t-12})$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_{t-1}) = 0$$

$$\operatorname{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_{t-12}) = EX_{t-1}\varepsilon_{t-12} = 0.05$$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X_t, X_{t-1}) = 0.5\operatorname{Var}(X_t) - 0.025 \qquad (1)$$

$$\operatorname{cov}(X_t, X_t) = \operatorname{cov}(2.9 + 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-12}, X_t) =$$

$$= 0.5\operatorname{cov}(X_t, X_{t-1}) + \operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_t) - \cancel{0.5\operatorname{cov}(X_t\varepsilon_{t-12})}$$

$$-0.5\operatorname{cov}(\varepsilon_{t-12}, X_t) =$$

$$= 0.5\operatorname{cov}(X_t, X_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2 - 0.5\operatorname{cov}(X_t, \varepsilon_{t-12})$$

$$\operatorname{cov}(X_t, \varepsilon_{t-12}) = \operatorname{cov}(2.9 + 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-12}, \varepsilon_{t-12}) =$$

$$= 0.5\operatorname{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_{t-12}) - 0.5\sigma_\varepsilon^2 = 0.025 - 0.5\sigma_\varepsilon^2$$

$$\operatorname{Var}(X_t) = 0.5\operatorname{Cov}(X_t, X_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2 - 0.0125 + 0.25\sigma_\varepsilon^2 =$$

$$= 0.5\operatorname{cov}(X_t, X_{t-1}) + 1.25\sigma_\varepsilon^2 - 0.0125 \qquad (2)$$

$$\operatorname{cov}(X_t, X_{t-1}) = 0.5\operatorname{Var}X_t - 0.025$$ ⇐ (1) מציב את מ-

$$\operatorname{Var}X_t = 0.5(0.5\operatorname{Var}X_t - 0.025) + 1.25\sigma_\varepsilon^2 - 0.0125$$ ⇐

$$0.75 \, Var \, X_t = 1.25 \, \sigma_\varepsilon^2 - 0.025$$

$$\Rightarrow \quad Var \, X_t = \frac{1.25 \cdot 0.25 - 0.025}{0.75} = 0.383 \qquad \rho_1 = 0.436$$

$$cov(X_t, X_{t-1}) = 0.5 \cdot 0.383 - 0.025 = 0.167$$

1.3

$$X_{120}(1) = E(X_{121} \mid X_{120}, \dots) =$$

$$= E(2.9 + 0.5 X_{120} + \varepsilon_{121} - 0.5 \varepsilon_{109} \mid X_{120}, \dots) =$$

$$= 2.9 + 0.5 X_{120} - 0.5 \varepsilon_{109} = 2.9 + 0.5 \cdot 6.21 - 0.5 \cdot (-\overset{0.116}{\cancel{0.018}}) =$$

$$= 6.06$$

$$\varepsilon_{109} = \cancel{1}$$

$$X_{120}(2) = E(X_{122} \mid X_{120}, \dots) =$$

$$= \mu + 0.5 X_{120}(1) - 0.5 \varepsilon_{110} = 2.9 + 0.5 \cdot 6.06 - 0.5 \cdot (-0.018) = 5.91$$

$$X_{122} = \mu + 0.5 X_{121} + \varepsilon_{122} - 0.5 \varepsilon_{110} = 0.5 (0.5 X_{120} + \varepsilon_{121} - 0.5 \varepsilon_{109}) +$$

$$+ \varepsilon_{122} - 0.5 \varepsilon_{110} = \mu + 0.25 X_{120} + 0.5 \varepsilon_{121} - 0.25 \varepsilon_{109} + \varepsilon_{122} - 0.5 \varepsilon_{110}$$

$$\hat{X}_{120}(2) = \mu + 0.25 X_{120} - 0.25 \varepsilon_{109} - 0.5 \varepsilon_{110} \Rightarrow$$

$$e_{120}(2) = X_{122} - \hat{X}_{120}(2) = \varepsilon_{122} + 0.5 \varepsilon_{121}$$

$$Var(e_{120}(2)) = (1 + 0.25) \, \sigma_\varepsilon^2 = 1.25 \cdot 0.25 = 0.3125$$

(2) אורך מחזור 12:

1. $H_0: \alpha_1 = \beta_1 = 0$

$$\frac{(\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\beta}_1^2)/2}{2\hat{\sigma}^2/T} \overset{H_0}{\sim} F_{2,T-n}$$

$$\Rightarrow \frac{60\cdot((-1.07)^2+0.61^2)/2}{2\cdot 7.65} = 2.97 \qquad F_{2,48} = 3.2$$

$\Leftarrow$ לא נדחה את H_0.

2. אורך מחזור 6:

$H_0: \alpha_2 = \beta_2 = 0$

$$\frac{60\cdot(0.63^2+0.01^2)}{4\cdot 7.65} = 0.78$$

$\Leftarrow$ לא נדחה H_0.

(3) אורך מחזור 4.

$H_0: \alpha_3 = \beta_3 = 0$

$$\frac{60(1.34^2+1.47^2)}{4\cdot 7.65} = 7.76$$

$\Leftarrow$ נדחה H_0

4. אורך מחזור 3

$H_0: \alpha_4 = \beta_4 = 0$

$$\frac{60(0.93^2+(-1.61)^2)}{4\cdot 7.65} = 6.78$$

$\Leftarrow$ לא נדחה H_0.

5. אורך מחזור 2.4

$H_0: \alpha_5 = \beta_5 = 0.$

$$\frac{60\cdot(0.52^2+0.58^2)}{4\cdot 7.65} = 1.19$$

$\Leftarrow$ לא נדחה.

6. אורך מחזור 2:

$H_0: \alpha_6 = 0.$

$$\frac{\hat{\alpha}_6}{\hat{\sigma}^2/T} \overset{H_0}{\sim} F_{1,48} \Rightarrow \frac{0.1^2}{7.65/60} = 0.08$$

$$F^{0.05}_{1,48} = 4.05$$

⇐ לא נדחה H_0.

מודל הסונלי:

$$Y_t = \alpha_0 + \sum_{k=3,4} \left(\alpha_k \cos\frac{2\pi k}{12} t + \beta_k \sin\frac{2\pi k}{12} t\right) + \varepsilon_t$$

יש מרכיב שמוסיף לנו 4 פרמטרים ולכן נבדק 8 פרמטרים.

.2 $H_0: \hat{\alpha}_1 = \hat{\beta}_1 = \hat{\alpha}_2 = \hat{\beta}_2 = \hat{\alpha}_5 = \hat{\beta}_5 = \hat{\alpha}_6 = 0$

$$\frac{\left(\frac{T}{2}\left((\hat{\alpha}_1+\hat{\beta}_1)^2 + (\hat{\alpha}_2+\hat{\beta}_2)^2 + (\hat{\alpha}_5+\hat{\beta}_5)^2\right) + T\hat{\alpha}_6^2\right)/7}{S^2} \sim F_{7,48}$$

$$= \frac{\left(30\left(1.07^2+0.61^2+0.63^2+0.01^2+0.52^2+0.58^2\right) + 60\cdot 0.1^2\right)/7}{7.65} =$$

$$= 1.3 \qquad F_{11,48} = 2.05$$

⇐ לא נדחה את H_0

⇐ המודל מתאים יותר לנו.

$$\hat{Y}_t = 3.49 + \hat{\alpha}_3 \cos\frac{\pi}{2}t + \hat{\beta}_3 \sin\frac{\pi}{2}t + $$
$$+ \hat{\alpha}_4 \cos\frac{2\pi}{3}t + \hat{\beta}_4 \sin\frac{2\pi}{3}t$$

$$\hat{Y}_{61} = 3.49 + \hat{\alpha}_3 \cos\frac{61\pi}{2} + \hat{\beta}_3 \sin\frac{61\pi}{2} + \hat{\alpha}_4 \cos\frac{2\pi}{3}\cdot 61 +$$
$$+ \hat{\beta}_4 \sin\frac{2\pi}{3}\cdot 61 = 4.03$$

$\hat{Y}_{61} = \hat{Y}_{73}$ $\Leftarrow$ 12 ב [illegible] של [illegible]

$$E\left(\hat{Y}_{61} - E(\hat{Y}_{61})\right)^2 =$$

$$= E\Big((\hat{\alpha}_0 - \alpha_0) + (\hat{\beta}_3 - \beta_3) + (\hat{\beta}_4 - \beta_4)\sin\frac{2\pi}{3}\cdot 61 +$$
$$+ (\hat{\alpha}_4 - \alpha_4)\cos\frac{2\pi}{3}\cdot 61\Big)^2 =$$

$$= E(\hat{\alpha}_0 - \alpha_0)^2 + E(\hat{\beta}_3 - \beta_3)^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{3}\cdot 61\right)^2 \cdot E(\hat{\alpha}_4 - \alpha_4)^2 +$$
$$+ \left(\sin\frac{1\pi}{3}\cdot 61\right)^2 E(\hat{\beta}_4 - \beta_4)^2 =$$

$$= \sigma^2\left(\frac{1}{T} + \frac{2}{T} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{T} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{T}\right) = \frac{5}{T}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{12}$$

$$\hat{E}\left(\hat{Y}_{61} - E(\hat{Y}_{61})\right)^2 = \frac{1}{12}\cdot\hat{\sigma}^2 = \frac{7.65}{12} = 0.637 \Leftarrow$$

(3)

$\hat{L}_8 = 0.1(90-16) + 0.9(76+0) =$ 3.1

$= 7.4 + 68.4 = 75.8$

$\hat{R}_8 = 0.1(75.8-76) + 0.9 \cdot 0 = -0.02$

$\hat{S}_8^{*(4)} = 1(90-75.8) = 14.2$

$\bar{S} = \dfrac{4+15-35+14.2}{4} = -0.45$

$\Rightarrow \hat{S}_8^{(1)} = 4-(-0.45) = 4.45$

$\hat{S}_8^{(2)} = 15-(-0.45) = 15.45$

$\hat{S}_8^{(3)} = -35-(-0.45) = -34.55$

$\hat{S}_8^{(4)} = 14.2-(-0.45) = 14.65$

3.2

$\hat{X}_7(1) = L_7 + 2R_7 + S_7^{(1)} = 76+0+4 = 80$

$\hat{X}_8(1) = L_8 + R_8 + S_8^{(1)} = 75.8 - 0.02 + 4.45 = 80.23$

SARIMA$(2,0,1)(0,1,0)_4$ 3.3

$\hat{Y}_{9|8} = 0.6Y_8 + 0.2Y_7 - 0.5\varepsilon_8 =$

$= 0.6Y_8 + 0.2Y_7 - 0.5(Y_8 - \hat{Y}_{8|7}) = 0.6(X_8 - X_4) + 0.2(X_7 - X_3) -$

$-0.5(X_8 - X_4 - Y_{8|7}) = 0.6 \cdot (-15) + 0.2 \cdot (-5) - 3 = -13$

$\hat{X}_{9|8} - X_5 = \hat{Y}_{9|8} \Rightarrow \hat{X}_{9|8} = \hat{Y}_{9|8} + X_5 = -13 + 76 = 63$

$$\beta_t = \mu_t = \begin{pmatrix} \mu_{t1} \\ \mu_{t2} \end{pmatrix} \quad Y_t = \begin{pmatrix} Y_{t1} \\ Y_{t2} \end{pmatrix}$$ 4.1 (4)

$$\beta_t = I\,\beta_{t-1} + \eta_t$$

$$Y_t = I\,\beta_t + \varepsilon_t \qquad var(\varepsilon_t) = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & c_\varepsilon \\ c_\varepsilon & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \qquad X_t = T_t = I$$

$$\parallel$$

$$var(\eta_t)$$

4.2

$$\hat{\mu}_1 - \mu_1 = Y_1 - \mu_1 = \varepsilon_1$$

$$E(\hat{\mu}_1 - \mu_1)^2 = Var(\hat{\mu}_1 - \mu_1) = var\,\varepsilon_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & c_\varepsilon \\ c_\varepsilon & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{Y}_{2|1} = X_2 \hat{\beta}_{2|1} = X_2 \cdot T_1 \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_1 = Y_1$$ 4.3

$$F_2 = E(\hat{Y}_{2|1} - Y_2)^2 = E(Y_1 - Y_2)^2 = \cancel{Var}$$

$$Y_1 = \beta_1 + \varepsilon_1$$

$$Y_2 = \beta_2 + \varepsilon_2 \qquad \Rightarrow \qquad Y_1 - Y_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \eta_1$$

$$E(Y_1 - Y_2)^2 = E(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 = Var(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \begin{pmatrix} 2\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 & 2c_\varepsilon \\ 2c_\varepsilon & 2\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}$$

$$var(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{21}) = 2\sigma_\varepsilon^2; \; Var(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{22}) = 2\sigma_\varepsilon^2$$

$$cov(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{21}, \varepsilon_{12} - \varepsilon_{22}) = 2c_\varepsilon$$

ב.1 אם סדרת השאריות היא "רעש לבן"

⇐ $\rho_k \sim N(0,\frac{1}{N})$ לכל k

כאשר N = אורך הסדרה.

נבדוק, למשל, $H_0: \rho_1 = 0$

סטטיסטי המבחן הוא:

$$\frac{\hat{\rho}_1}{1/\sqrt{N}}$$

⇐ נדחה את H_0 אם $|\sqrt{N}\hat{\rho}_1| \geq 1.96$

$$|-0.24\cdot\sqrt{120}| = 2.64$$

⇐ לא נדחה את H_0

נבדוק $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$

בעזרת מבחן

נחשב סטטיסטי $Q = (n+2)\sum_k \frac{1}{n-k}\frac{\hat{\rho}_k^2}{1/n} \sim \chi^2_{K-p}$

כאשר p = מספר הפרמטרים הנאמדים.

אצלנו $K=3$

במודל $SARIMA(1,0,0)(1,0,0)_4$ יש 2 פרמטרים נאמדים

$$Q = 122\left(\frac{1}{119}\cdot\frac{(-0.24)^2}{1/120} + \frac{1}{118}\cdot\frac{(-0.11)^2}{1/120} + \frac{(-0.13)^2}{1/120}\cdot\frac{1}{117}\right) =$$

$= 43.24$

עבור $\alpha = 0.05$ $\chi^2_{(3-2)} = 3.84$

⇐ נדחה את H_0.

(עבור $H_0: \rho_1 = \dots = \rho_6 = 0$ נקבל $Q = 44.22$

$\chi^2_{(6-2)} = 9.49$

⇐ לא רעש לבן.

נמדל $SARIMA(1,0,0)(1,0,0)_4$ כזה

$$(1-\varphi_1 B)(1-\varphi_4 B^4)Y_t = \varepsilon_t$$

ונראה שמקדם המתאם העצמי הראשון גבוה יחסית בגודל

⇐ נוכל להכליל אותו ע"י הוספת ערך (ט)

MA למודל, כלומר, $SARIMA(1,0,0)(1,0,1)_4$

// בעצם אפשר להתייחס מודל $AR(1)$ לשגיאות:

$$\varepsilon_t = \theta\varepsilon_{t-1} + e_t$$

$$(1-\theta B)\varepsilon_t = e_t \qquad \text{אז}$$

$$\varepsilon_t = \frac{e_t}{(1-\theta B)}$$

⇐ נקבל מודל

$$//\ (1-\Phi_1 B)(1-\Phi_4 B^4)Y_t = (1-\theta B)e_t$$

5.2

$$\gamma_0 = Var(Y_t) = (1+1)\sigma^2 = 2\sigma^2 = 4$$

$$\gamma_1 = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) = -\sigma^2 = -2$$

$$\gamma_k = 0 \quad k > 1$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi}\left(2\sigma^2 + 2\sigma^2\cos\lambda\right) = \frac{2\sigma^2}{\pi}(1-\cos\lambda) \Leftarrow$$

$$f'(\lambda) = \frac{2\sigma^2}{\pi}\sin\lambda \qquad f''(\lambda) = \frac{2\sigma^2}{\pi}\cos\lambda$$

$$Bias\left(\hat{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{6}{M^2}f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{M^2}\cdot\frac{2\sigma^2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$Var\left(\hat{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{0.54\cdot M\cdot f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{T} = \frac{0.54\cdot 10}{60}\cdot\left(\frac{2\sigma^2}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 =$$

$$= 0.09\cdot\frac{4\sigma^4}{\pi^2} = 0.146$$

סעיף ו 5.3

$$0.2\left(L_{t-2}+L_{t-1}+L_t+L_{t+1}+L_{t+2}\right)=$$
$$=L_t$$

$$0.2\Big(10+5(t-2)-0.5(t-2)^2+10+5(t-1)-0.5(t-1)^2+$$
$$+10+5t-0.5t^2+10+5(t+1)-0.5(t+1)^2+10+5(t+2)-0.5(t+2)^2\Big)=$$
$$=0.2\Big(50+5\big((t-2)+(t-1)+t+(t+1)+(t+2)\big)-$$
$$-0.5\big((t-2)^2+(t-1)^2+t^2+(t+1)^2+(t+2)^2\big)\Big)=$$

$$=0.2\left(50+25t-0.5\left(5t^2+10\right)\right)=0.2\left(50+25t-2.5t^2-5\right)=$$
$$=10+5t-0.5t^2-1=9+5t-0.5t^2\neq 10+5t-0.5t^2=L_t-1$$

$$\hat{L}_t=0.2\left(Y_{t-2}+Y_{t-1}+Y_t+Y_{t+1}+Y_{t+2}\right)=$$
$$=0.2\left(L_{t-2}+\varepsilon_{t-2}+L_{t-1}+\varepsilon_{t-1}+L_t+\varepsilon_t+L_{t+1}+\varepsilon_{t+1}+L_{t+2}+\varepsilon_{t+2}\right)$$
$$=0.2\left(L_{t-2}+L_{t-1}+L_t+L_{t+1}+L_{t+2}\right)+0.2\big(\varepsilon_{t-2}+\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t+\varepsilon_{t+1}+$$
$$+\varepsilon_{t+2}\big)=L_t-1+\frac{1}{5}\left(\varepsilon_{t-2}+\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t+\varepsilon_{t+1}+\varepsilon_{t+2}\right)$$

$$E(\hat{L}_t)=L_t-1\Rightarrow \mathrm{Bias}(\hat{L}_t)=-1$$

$$\mathrm{Var}(\hat{L}_t)=\frac{1}{25}\cdot 5\sigma_\varepsilon^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{5}.$$